МГУ - ШКОЛЕ

М. К. Потапов А. В. Шевкин

Алгебра и начала математического анализа

11

Дидактические материалы

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ - ШКОЛЕ

М. К. Потапов А. В. Шевкин

Алгебра и начала математического анализа

Дидактические материалы

11 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

9-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72
П64

12+

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Потапов М. К.

П64 Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 11 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — 9-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 189 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-046874-9.

Сборник содержит самостоятельные и контрольные работы с итоговым тестом к учебнику «Алгебра и начала математического анализа, 11» С. М. Никольского и др. Дидактические материалы дополняют учебник более сложными заданиями, необходимыми для работы в классах с углублённым изучением математики. В книгу включены также материалы для подготовки к самостоятельным работам с примерами выполнения заданий, аналогичных заданиям из самостоятельных работ. Поэтому сборник можно использовать при работе по любому учебнику, а также для самообразования.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72+22.161я72

ISBN 978-5-09-046874-9

Предисловие

Дидактические материалы по курсу алгебры и начал математического анализа для 11 класса содержат 50 самостоятельных и 7 контрольных работ в четырех вариантах, а также тест для самоконтроля в двух вариантах. Ко всем вариантам контрольных работ и к тесту имеются ответы.

Содержание дидактических материалов полностью соответствует учебнику «Алгебра и начала математического анализа» для 11 класса серии «МГУ — школе» (авторы С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин) и дополняет его более сложными заданиями, необходимыми для работы в профильных классах.

Это дидактические материалы нового типа, содержащие разбор заданий для подготовки к самостоятельным работам и поэтому не нуждающиеся в решебниках. Их можно использовать в классе и дома при работе по любым учебникам, а также для восполнения пробелов и самообразования.

Материалы для подготовки к самостоятельным работам содержат подробные решения заданий, цель которых — объяснение выбранных способов действий. Приведенные решения не являются образцами оформления решений учащимися, так как их решения могут быть краткими: в них, как правило, пропускают комментарии при выполнении преобразований уравнений или неравенств. Некоторые типы заданий, например иррациональные уравнения, встречаются в разных работах, так как в каждой из этих работ предполагается свой способ решения уравнения.

Темы, отмеченные в дидактических материалах звездочкой, не являются обязательными для изучения в общеобразовательных классах. Они охватывают программу углубленного изучения математики (профильных классов). Предложенные работы можно использовать как обучающие самостоятельные работы для классной или для домашней работы. Любые из самостоятельных работ учитель может использовать для контроля на отметку. При этом следует учесть, что многие из них и все контрольные работы избыточны по объему. Предполагается, что учитель отберет из них часть заданий с учетом уровня подготовки учащихся своего класса и времени, отводимого на выполнение работы.

Следует учесть, что некоторые задания вариантов III и IV несколько сложнее соответствующих заданий вариантов I и II. Так как в классах с углубленным изучением математики контрольных работ должно быть больше, чем в классах, работающих по общеобразовательной программе, то отдельные самостоятельные работы, отмеченные звездочкой, можно провести как контрольные работы.

Материалы для подготовки к самостоятельным работам

1*. Сложная функция

Пример 1. Вычислим значение функции

$$f(x)=\sqrt[4]{\log_3(3\operatorname{tg}x)} \text{ при } x=\frac{\pi}{4}.$$

Решение. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{\log_3\left(3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[4]{\log_3 3}=\sqrt[4]{1}=1.$

Ответ. 1.

Пример 2. Даны элементарные функции: $g(x)=\sqrt[5]{x}$, $\varphi(x)=\sin x$, $f(x)=x^2$. Запишем сложную функцию $f(\varphi(g(x)))$.

Решение. Для каждого числа $x\in\boldsymbol{R}$ получим число $g(x)=\sqrt[5]{x}$, для каждого такого числа $g(x)$ получим число $\varphi(g(x))=\sin(g(x))=\sin\left(\sqrt[5]{x}\right)$. Наконец, для этого числа найдем число $f(\varphi(g(x)))=\left(\sin\sqrt[5]{x}\right)^2$.

Ответ. $f(\varphi(g(x)))=\left(\sin\sqrt[5]{x}\right)^2$.

Пример 3. Решим уравнение:

а) $f(g(x))=\frac{1}{2}$, если $f(x)=\log_3 x$, $g(x)=\operatorname{tg}x$;

б) $f(f(x))=1$, если $f(x)=\sin x$.

Решение. а) Требуется решить уравнение

$$\log_3(\operatorname{tg}x)=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Обозначим $\operatorname{tg}x=t$, тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$\log_3 t=\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет единственный корень $t=\sqrt{3}$. Следовательно, только решения уравнения

$$\operatorname{tg}x=\sqrt{3} \qquad (3)$$

являются решениями уравнения (1).

Уравнение (3) имеет единственную серию решений $x_n=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Поэтому уравнение (1) имеет ту же серию решений x_n.

б) Требуется решить уравнение

$$\sin(\sin x)=1. \tag{4}$$

Обозначим $t=\sin x$, тогда уравнение (4) перепишется в виде

$$\sin t=1. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет единственную серию решений $t_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. Следовательно, только решения уравнений $\sin x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ (если они существуют), будут решениями уравнения (4). Но ни одно из этих уравнений не имеет решений, так как $\left|\frac{\pi}{2}+2\pi n\right|>1$ для любого $n\in Z$. Поэтому уравнение (4) не имеет решений.

Ответ. а) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; б) нет решений.

2. Область определения функции

Пример 1. Найдем $D(\varphi)$ — область определения функции $\varphi(x)=\sqrt{x^2-26x+25}$.

Решение. Если функция задана формулой $\varphi(x)=\sqrt{f(x)}$, то ее область определения $D(\varphi)$ находится из условия $f(x)\geqslant 0$, так как функция $y=\sqrt{t}$ определена лишь для $t\geqslant 0$.

Решим квадратное неравенство $x^2-26x+25\geqslant 0$. Оно имеет множество решений[1] $(-\infty;\ 1]\cup[25;\ +\infty)$, следовательно, $D(\varphi)=(-\infty;\ 1]\cup[25;\ +\infty)$.

Ответ. $D(\varphi)=(-\infty;\ 1]\cup[25;\ +\infty)$.

Пример 2. Найдем $D(\varphi)$ — область определения функции $\varphi(x)=\log_{0,6}\frac{25-x^2}{x^2-9}$.

Решение. Если функция задана формулой $\varphi(x)=\log_a f(x)$, где $a>0$, $a\neq 1$, то ее область определения $D(\varphi)$ находится из условия $f(x)>0$, так как функция $y=\log_a t$ определена лишь для $t>0$.

Решим рациональное неравенство $\frac{25-x^2}{x^2-9}>0$. Перепишем его в виде

$$\frac{(x-5)(x+5)}{(x-3)(x+3)}<0 \tag{1}$$

[1] Говоря о множестве всех решений уравнения, неравенства или системы, мы будем часто опускать слово «всех», подразумевая его.

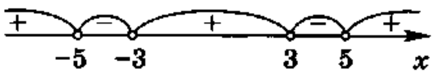

Рис. 1

и, применив метод интервалов (рис. 1), найдем все его решения.

Неравенство (1) имеет множество решений $(-5; -3) \cup (3; 5)$, следовательно, $D(\varphi) = (-5; -3) \cup (3; 5)$.

Ответ. $(-5; -3) \cup (3; 5)$.

Пример 3. Найдем $D(\varphi)$ — область определения функции $\varphi(x) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\log_2(x-2)}$.

Решение. Если функция задана формулой $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, то ее область определения $D(\varphi)$ есть общая часть областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$, из которой исключены все x, для которых $g(x) = 0$.

Сначала найдем общую часть областей определения функций $\sqrt{16 - x^2}$ и $\log_2(x-2)$. Для этого решим систему $\begin{cases} 16 - x^2 \geqslant 0 \\ x - 2 > 0. \end{cases}$ Все решения этой системы составляют промежуток $(2; 4]$.

Теперь, решив уравнение $\log_2(x-2) = 0$, найдем, что знаменатель дроби обращается в нуль лишь при $x = 3$. Исключив это число из найденного промежутка, найдем, что $D(\varphi) = (2; 3) \cup (3; 4]$.

Ответ. $(2; 3) \cup (3; 4]$.

Пример 4. Найдем $D(\varphi)$ — область определения функции $\varphi(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} + \log_2(\operatorname{tg} x)$.

Решение. $D(\varphi)$ есть общая часть областей определения функций $\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ и $\log_2(\operatorname{tg} x)$, т. е. $D(\varphi)$ есть множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 \geqslant 0 \\ \operatorname{tg} x > 0. \end{cases}$$

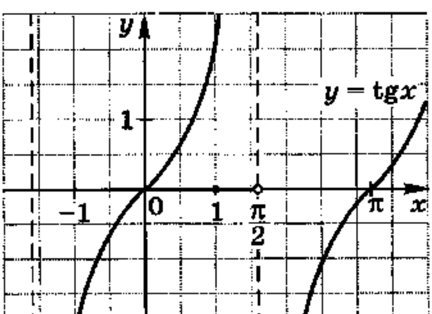

Рис. 2

Сначала решим неравенство $-x^2 + 4x - 3 \geqslant 0$. Все его решения составляют промежуток $[1; 3]$.

Из этого промежутка отберем те x, для которых $\operatorname{tg} x > 0$. Так как на отрезке $[1; 3]$ функция $\operatorname{tg} x$ определена и положительна только на промежутке $\left[1;\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 2), то $D(\varphi)=\left[1;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. $\left[1;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Область изменения функции

Пример 1. Найдем $E(f)$ — область изменения функции $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$.

Решение. Так как $x^2-6x+10=(x-3)^2+1\geqslant 1$ при любом значении $x\in\boldsymbol{R}$ и функция $y=\sqrt{t}$ возрастает на множестве $[0;\ +\infty)$, то $\sqrt{x^2-6x+10}\geqslant\sqrt{1}=1$, т. е. $f(x)\geqslant 1$ при любом значении x и $f(x)=1$ при $x=3$. При этом функция $f(x)$ принимает все значения из промежутка $[1;\ +\infty)$, поэтому $E(f)=[1;\ +\infty)$.

Ответ. $[1;\ +\infty)$.

Пример 2. Найдем $E(f)$ — область изменения функции $f(x)=\sqrt{100-x^2}$.

Решение. Двойное неравенство $0\leqslant 100-x^2\leqslant 100$ справедливо при любом значении $x\in D(f)=[-10;\ 10]$. А так как функция $y=\sqrt{t}$ возрастающая, то $0\leqslant\sqrt{100-x^2}\leqslant\sqrt{100}=10$, т. е. $0\leqslant f(x)\leqslant 10$ при любом значении $x\in D(f)$. При этом функция $f(x)$ принимает все значения из промежутка $[0;\ 10]$, поэтому $E(f)=[0;\ 10]$.

Ответ. $[0;\ 10]$.

Пример 3. Найдем $E(f)$ — область изменения функции $f(x)=\dfrac{24}{\sqrt{100-x^2}}$, $x\in[-6;\ 8]$.

Решение. Так как $-6\leqslant x\leqslant 8$, то

$$0\leqslant x^2\leqslant 64,$$
$$-64\leqslant -x^2\leqslant 0,$$
$$36\leqslant 100-x^2\leqslant 100,$$
$$6\leqslant\sqrt{100-x^2}\leqslant 10,$$
$$\frac{24}{10}\leqslant\frac{24}{\sqrt{100-x^2}}\leqslant\frac{24}{6},$$

и $2{,}4\leqslant f(x)\leqslant 4$ при любом значении $x\in[-6;\ 8]$, причем $f(x)=2{,}4$ при $x=0$ и $f(x)=4$ при $x=8$. При этом функция $f(x)$ принимает все значения из промежутка $[2{,}4;\ 4]$, поэтому $E(f)=[2{,}4;\ 4]$.

Ответ. $[2{,}4;\ 4]$.

Пример 4. Найдем $E(f)$ — область изменения функции $f(x)=5\sin x-12\cos x$.

Решение. Так как $\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$, то функцию можно записать в виде $f(x)=13\left(\frac{5}{13}\sin x-\frac{12}{13}\cos x\right)=$ $=13(\cos\alpha\sin x-\sin\alpha\cos x)=13\sin(x-\alpha)$, где $\alpha=\arccos\frac{5}{13}$.

Тогда из неравенства $-1\leqslant\sin(x-\alpha)\leqslant1$ следует, что $-13\leqslant f(x)\leqslant13$ при любом $x\in\boldsymbol{R}$. При этом функция $f(x)$ принимает все значения из промежутка $[-13;\ 13]$. Это означает, что $E(f)=[-13;\ 13]$.

Ответ. $[-13;\ 13]$.

Пример 5. Найдем $E(f)$ — область изменения функции $f(x)=x^2+10x+30+\frac{1}{x^2+10x+26}$.

Решение. Так как $a=x^2+10x+26=(x+5)^2+1\geqslant1$ при любом значении x ($a=1$ при $x=-5$), то функцию можно записать в виде $f(x)=a+\frac{1}{a}+4$. Для любого положительного a справедливо неравенство $a+\frac{1}{a}\geqslant2$, причем $a+\frac{1}{a}=$ $=2$ при $a=1$. Поэтому $f(x)\geqslant6$ при любом $x\in\boldsymbol{R}$.

При этом значение 6 функция $f(x)$ принимает в точке $x=-5$, и функция $f(x)$ принимает все значения из промежутка $[6;\ +\infty)$. Поэтому $E(f)=[6;\ +\infty)$.

Ответ. $[6;\ +\infty)$.

4. Четные и нечетные функции

Пример 1. Докажем, что функция $f(x)=|x|+7x^2$ четная.

Решение. Так как для любого $x\in\boldsymbol{R}$ верны равенства $f(-x)=|-x|+7(-x)^2=|x|+7x^2=f(x)$, то функция $f(x)$ четная.

Пример 2. Докажем, что функция $f(x)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ нечетная.

Решение. Так как для любого $x\in\boldsymbol{R}$ верны равенства

$$f(-x)=\lg\left(\sqrt{(-x)^2+1}+x\right)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=$$

$$=\lg\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lg\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{-1}=-\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-f(x),$$

то функция $f(x)$ нечетная.

Пример 3. Исследуем на четность функцию:

а) $f(x)=\dfrac{12}{(x-10)(x+10)}$;

б) $f(x)=\dfrac{5}{x-11}+\dfrac{7}{x+21}$.

Решение. а) Область определения функции $f(x)$ есть множество $D(f)=(-\infty;\ -10)\cup(-10;\ 10)\cup(10;\ +\infty)$.

Так как

$$f(-x)=\frac{12}{(-x-10)(-x+10)}=\frac{12}{(x+10)(x-10)}=f(x)$$

для любого $x\in D(f)$, то функция $f(x)$ четная.

б) Так как область определения функции $f(x)$ есть множество $D(f)=(-\infty;\ -21)\cup(-21;\ 11)\cup(11;\ +\infty)$, то, в частности, число -11 принадлежит $D(f)$, а противоположное ему число 11 не принадлежит $D(f)$. Поэтому функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

5*. Задачи с параметром. Использование четности функций

Пример 1. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^4-3ax^2-9a+3a^2=0 \qquad (1)$$

имеет ровно три корня.

Решение. Для каждого значения a рассмотрим функцию $f(x)=x^4-3ax^2-9a+3a^2$. Она определена на множестве $\boldsymbol{R}$. Эта функция четная, так как для любого $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо равенство $f(-x)=f(x)$.

Поэтому если число x_0 — корень уравнения (1), то число $-x_0$ тоже корень этого уравнения. Уравнение (1) имеет ровно три корня тогда и только тогда, когда оно имеет корень $x_0=0$ и еще два отличных от нуля корня, отличающихся знаками. Найдем все значения a, при каждом из которых число нуль является корнем уравнения (1). Подставив $x=0$ в уравнение (1), получим, что это возможно только в двух случаях: при $a=0$ и при $a=3$. Итак, при $a=0$ и при $a=3$ уравнение (1) имеет корень $x_0=0$.

При $a=0$ уравнение (1) имеет вид $x^4=0$. Это уравнение имеет только один корень $x_0=0$.

При $a=3$ уравнение (1) имеет вид $x^4-9x^2=0$. Это уравнение имеет ровно три корня: $x_0=0$, $x_1=3$ и $x_2=-3$.

Следовательно, только при $a=3$ уравнение (1) имеет ровно три корня.

Ответ. $a=3$.

Пример 2. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{ax-1}{x+2a}+\frac{ax+1}{x-2a}=1 \qquad (2)$$

имеет ровно один корень.

Решение. При $a=0$ уравнение (2) не имеет корней. Для каждого значения $a \neq 0$ рассмотрим функцию $f(x)=$ $=\frac{ax-1}{x+2a}+\frac{ax+1}{x-2a}$. Она определена на множестве $D(f)$ всех x, кроме $x=2a$ и $x=-2a$. Эта функция четная, так как для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство

$$f(-x)=\frac{-ax-1}{-x+2a}+\frac{-ax+1}{-x-2a}=\frac{ax+1}{x-2a}+\frac{ax-1}{x+2a}=f(x).$$

Поэтому если число x_0 — корень уравнения (2), то и число $-x_0$ тоже корень этого уравнения. Уравнение (2) имеет один корень тогда и только тогда, когда этот корень нуль и других корней нет. Найдем все значения a, при каждом из которых число нуль является корнем уравнения (2). Подставив $x=0$ в это уравнение, получим, что $a=-1$.

Итак, при $a=-1$ уравнение (2) имеет корень $x_0=0$. Проверим, не имеет ли оно других корней при $a=-1$.

Решив уравнение $\frac{-x-1}{x-2}+\frac{-x+1}{x+2}=1$, убедимся, что при $a=-1$ уравнение (2) действительно имеет ровно один корень ($x_0=0$).

Ответ. $a=-1$.

Пример 3. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-(3a+1)|x|+2a^2+2a=0 \qquad (3)$$

имеет ровно четыре корня.

Решение. Функция $f(x)=x^2-(3a+1)|x|+2a^2+2a$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$ для каждого значения a. Она четная, так как $f(-x)=f(x)$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Поэтому уравнение (3) имеет ровно четыре корня тогда и только тогда, когда уравнение

$$t^2-(3a+1)t+2a^2+2a=0 \qquad (4)$$

имеет два различных положительных корня t_1 и t_2 (в этом случае уравнение (3) будет иметь четыре корня: t_1, t_2, $-t_1$ и $-t_2$).

Уравнение (4) имеет два различных положительных корня t_1 и t_2 тогда и только тогда, когда выполнены три условия: дискриминант D уравнения (4) положителен, и сумма t_1+t_2, и произведение t_1t_2 корней уравнения (4) положительны.

Эти три условия означают, что искомые значения — это только те a, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}(3a+1)^2-4(2a^2+2a)>0\\ 3a+1>0\\ 2a^2+2a>0.\end{cases} \qquad (5)$$

Решениями системы неравенств (5) являются все a из множества $(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

Следовательно, для каждого из этих значений a уравнение (3) имеет ровно четыре корня.

Ответ. $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 4. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$5\cdot 25^{|x|}-(1+25a)\cdot 5^{|x|}+5a=0 \qquad (6)$$

имеет ровно два корня.

Решение. Функция $f(x)=5\cdot 25^{|x|}-(1+25a)\cdot 5^{|x|}+5a$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$ для каждого значения a. Она четная, так как $f(-x)=f(x)$ для любого $x\in\boldsymbol{R}$.

Поэтому если число x_0 — корень уравнения (6), то число $-x_0$ тоже корень этого уравнения.

Обозначим $t=5^{|x|}$. Тогда уравнение (6) перепишется в виде

$$5t^2-(1+25a)t+5a=0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет два корня: $t_1=0{,}2$ и $t_2=5a$.

Уравнение $5^{|x|}=5^{-1}$ корней не имеет. Уравнение $5^{|x|}=5a$ имеет два различных корня x_0 и $-x_0$ тогда и только тогда, когда $5a>1$, т. е. когда $a>0{,}2$.

Следовательно, уравнение (6) имеет ровно два корня только когда $a>0{,}2$.

Ответ. $a>0{,}2$.

6. Промежутки монотонности функции. Промежутки знакопостоянства функции

Пример 1. Определим по графику функции $y=f(x)$ ее промежутки: а) монотонности; б) знакопостоянства (рис. 3).

Решение. а) Видно, что функция определена на промежутке $[-5;\ 6]$, на промежутках $[-5;\ -3]$ и $[0;\ 6]$ она возрастает, а на промежутке $[-3;\ 0]$ — убывает.

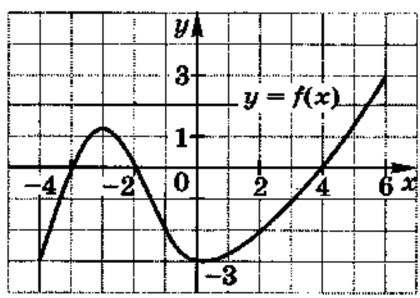

Рис. 3

б) $f(x)>0$ на промежутках $(-4; -2)$ и $(4; 6]$; $f(x)<0$ на промежутках $[-5; -4)$ и $(-2; 4)$.

Пример 2. Докажем, что функция $f(x)=\sqrt{2x-3}$ возрастает на всей области определения, т. е. на промежутке $[1{,}5; +\infty)$.

Решение. Пусть $1{,}5 \leqslant x_1 < x_2$. Докажем, что $f(x_1)<f(x_2)$. Для этого определим знак разности $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{2x_1-3}-\sqrt{2x_2-3}$. Умножим и разделим эту разность на положительное число $\sqrt{2x_1-3}+\sqrt{2x_2-3}$ (корни не обращаются в нуль одновременно):

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{2x_1-3}-\sqrt{2x_2-3}=\frac{2(x_1-x_2)}{\sqrt{2x_1-3}+\sqrt{2x_2-3}}.$$

Числитель полученной дроби отрицательный, так как $x_1<x_2$, знаменатель положительный, поэтому

$$f(x_1)-f(x_2)<0, \text{ т. е. } f(x_1)<f(x_2).$$

Итак, большему значению аргумента из промежутка $[1{,}5; +\infty)$ соответствует большее значение функции, следовательно, функция на этом промежутке возрастает.

Пример 3. Определим промежутки знакопостоянства функции $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$.

Решение. Область определения функции $f(x)$ есть множество $(-\infty; 3)\cup(3; 4)\cup(4; +\infty)$, функция $f(x)$ обращается в нуль в точках $x=1$ и $x=2$. Определим знак $f(x)$ на интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$ (рис. 4).

Рис. 4

Применяя метод интервалов, получим, что $f(x)>0$ на интервалах $(-\infty; 1)$, $(2; 3)$, $(4; +\infty)$; $f(x)<0$ на интервалах $(1; 2)$, $(3; 4)$.

7. Построение графиков функций

Пример 1. Построим график функции $y=-\log_2(x-3)$.

Решение. Сначала построим график функции $y=\log_2 x$ (на рисунке 5 он изображен пунктирной линией), потом перенесем его на 3 единицы вправо, получим график функции $y=\log_2(x-3)$ (рис. 5). Затем симметрично отобразим полученный график относительно оси Ox, получим график функции $y=-\log_2(x-3)$ (рис. 6).

Пример 2. Построим график функции $y=\sqrt{-x+4}$.

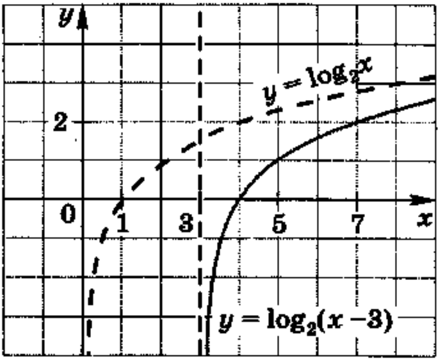

Рис. 5

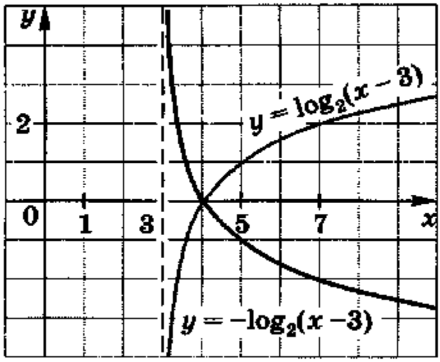

Рис. 6

Решение. Данную функцию можно задать формулой $y=\sqrt{-(x-4)}$. Сначала построим график функции $y=\sqrt{x}$ (на рисунке 7 он изображен пунктирной линией), потом симметрично отобразим его относительно оси Oy, получим график функции $y=\sqrt{-x}$ (рис. 7). Затем перенесем полученный график на 4 единицы вправо, получим график функции $y=\sqrt{-x+4}$ (рис. 8).

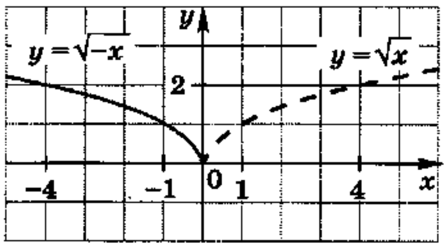

Рис. 7

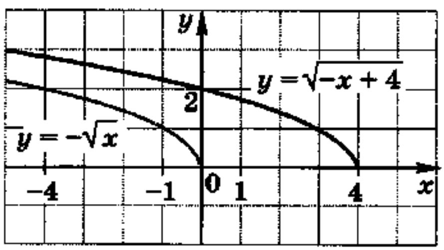

Рис. 8

Пример 3. Построим график функции $y = 3\cos 0{,}5x$.

Решение. Сначала построим график функции

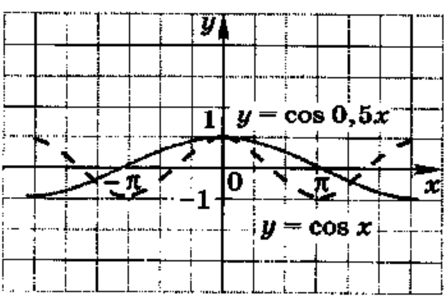

Рис. 9

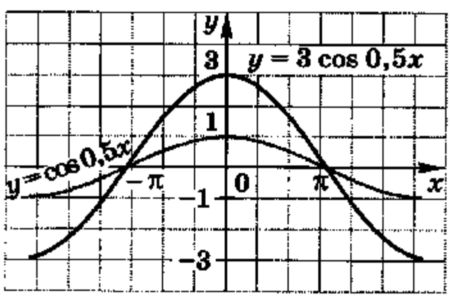

Рис. 10

$y=\cos x$ (на рисунке 9 он изображен пунктирной линией), потом растянем его вдоль оси Ox в 2 раза, получим график функции $y=\cos 0{,}5x$ (рис. 9). Затем растянем его вдоль оси Oy в 3 раза, получим график функции $y=3\cos 0{,}5x$ (рис. 10).

Пример 4. Построим график функции $y=\sqrt{21-x^2+4x}$.

Решение. Данную функцию можно задать формулой $y=\sqrt{25-(x-2)^2}$. Так как $y\geqslant 0$ для всех $x\in D(y)$, то точками графика этой функции являются только те точки плоскости xOy, координаты которых являются решениями системы

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=25\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

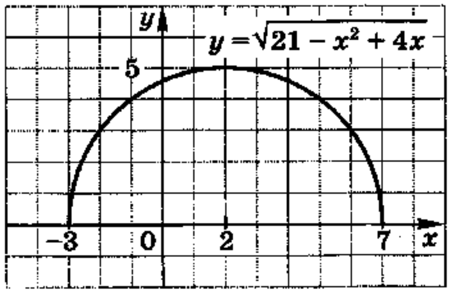

Рис. 11

Поэтому графиком функции $y=\sqrt{21-x^2+4x}$ является верхняя полуокружность окружности $(x-2)^2+y^2=5^2$ с центром (2; 0) и радиусом 5 (рис. 11).

8*. Графики функций, содержащих модули

Пример 1. Построим график функции $y=\left|\frac{1}{x-2}+1\right|$.

Решение. Область определения функции есть множество всех действительных чисел x, кроме $x=2$. Сначала построим график функции $y=\frac{1}{x-2}+1$ переносом графи-

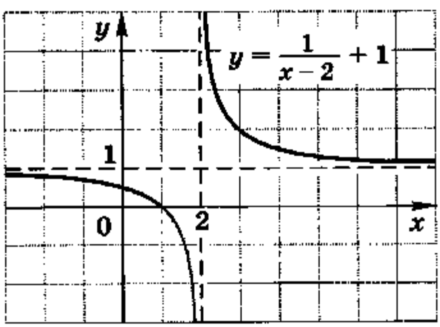

Рис. 12

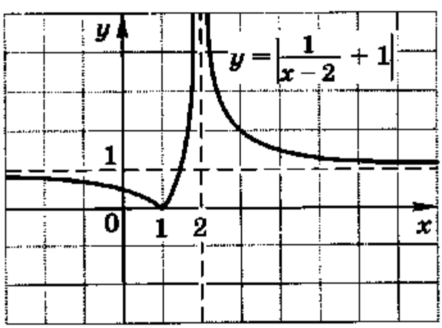

Рис. 13

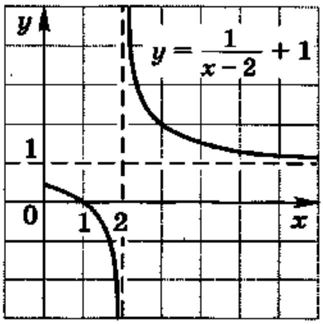

Рис. 14

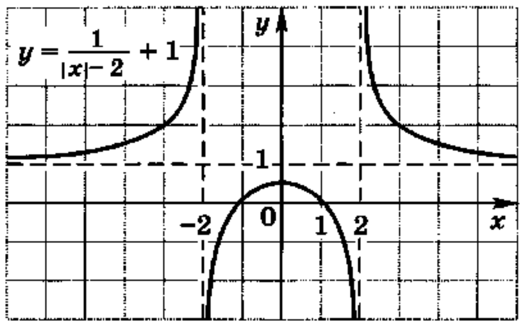

Рис. 15

ка функции $y=\frac{1}{x}$ на 2 единицы вправо и на 1 единицу вверх (рис. 12). Для всех $y \geqslant 0$ этот график совпадает с графиком функции $y=\left|\frac{1}{x-2}+1\right|$ (эта часть графика изображена жирной линией). Часть построенного графика, для точек которого $y<0$, симметрично отобразим относительно оси Ox и получим искомый график (рис. 13).

Пример 2. Построим график функции $y=\frac{1}{|x|-2}+1.$

Решение. Область определения функции есть множество всех действительных чисел x, кроме чисел $x=-2$ и $x=2$. Так как функция $y=\frac{1}{|x|-2}+1$ четная, то построим ее график сначала для $x \geqslant 0$. В этом случае функцию можно задать формулой $y=\frac{1}{x-2}+1$, ее график изображен на рисунке 14. Теперь построенную часть графика симметрично отобразим относительно оси Ox и получим искомый график (рис. 15).

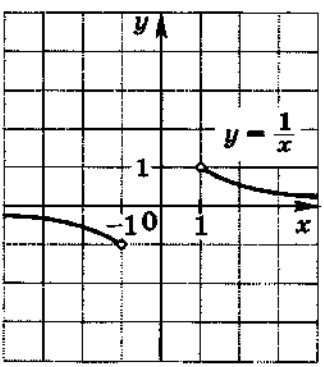

Рис. 16

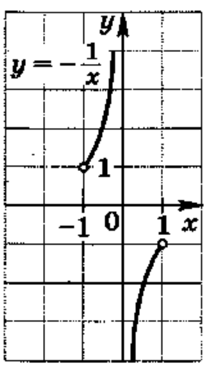

Рис. 17

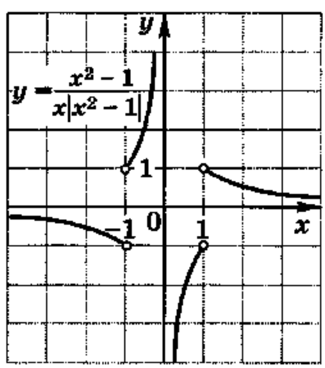

Рис. 18

Пример 3. Построим график функции $y=\frac{x^2-1}{x|x^2-1|}$.

Решение. Область определения функции есть множество всех действительных чисел x, кроме чисел 0, -1 и 1. Для $|x|>1$ искомый график совпадает с частью графика функции $y=\frac{1}{x}$ (рис. 16). Для $|x|<1$ искомый график совпадает с частью графика функции $y=-\frac{1}{x}$ (рис. 17). На рисунке 18 изображен график искомой функции, который получен объединением двух его частей для $|x|>1$ и для $|x|<1$.

9*. Задачи с параметром. Использование графиков функций

Пример 1. Найдем все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3-6x^2+3x}{|x|}=b \qquad (1)$$

имеет ровно три корня.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^3-6x^2+3x}{|x|}$. Она определена для всех $x\neq 0$. Для $x>0$ функцию $y=f(x)$ можно задать формулой $y=x^2-6x+3$. Графику функции $f(x)$ принадлежат лишь те точки параболы $y=x^2-6x+3$ с вершиной $(3; -6)$, для которых $x>0$. Для $x<0$ функцию $y=f(x)$ можно задать формулой $y=-x^2+6x-3$. Графику функции $y=f(x)$ принадлежат лишь те точки параболы $y=-x^2+6x-3$ с вершиной $(3; 6)$, для которых $x<0$ (эта парабола симметрична параболе $y=x^2-6x+3$ относительно оси Ox).

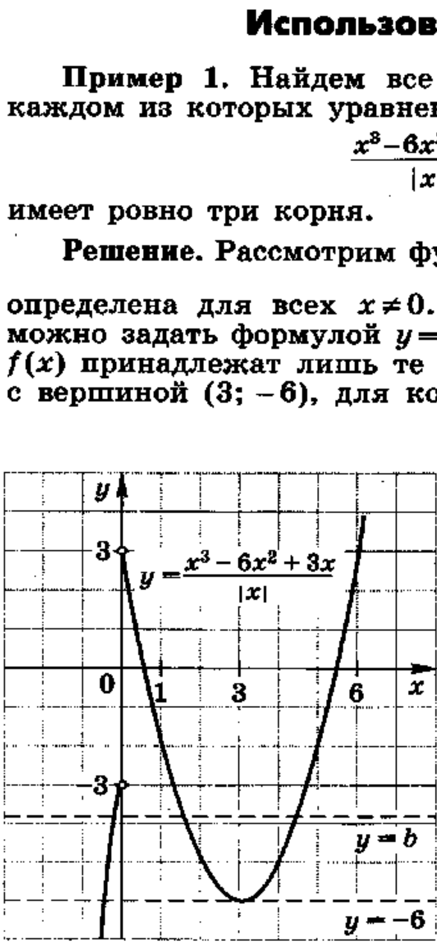

Рис. 19

График функции $y=f(x)$ изображен на рисунке 19.

Уравнение (1) имеет ровно три корня только в том случае, когда прямая $y=b$ пересекает график функции $y=f(x)$ ровно в трех точках, т. е. только при $b\in(-6; -3)$.

Ответ. $b\in(-6; -3)$.

Пример 2. Найдем все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$x^2-2x-4-|x^2+x-2|=b \qquad (2)$$

имеет ровно два корня.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-2x-4-|x^2+x-2|$. Она определена для всех $x\in\mathbf{R}$. Так как квадратный трехчлен x^2+x-2 равен нулю и при $x=1$, и при $x=-2$, то для построения графика функции $y=f(x)$ рассмотрим два случая.

На промежутках $(-\infty; -2]$ и $[1; +\infty)$ функцию $y=f(x)$ можно задать формулой $y=-3x-2$. На каждом из этих промежутков график функции $y=f(x)$ — часть прямой $y=-3x-2$. Причем $f(-2)=4$, $f(1)=-5$.

На промежутке $[-2; 1]$ функцию можно задать формулой $y=2x^2-x-6$. На этом промежутке график функции $y=f(x)$ — часть параболы с вершиной $\left(\frac{1}{4}; -6\frac{1}{8}\right)$. Причем $f(-2)=4$, $f(1)=-5$.

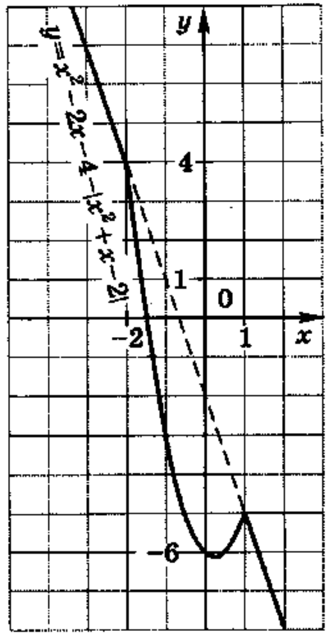

Рис. 20

Для всех x график функции $y=f(x)$ изображен на рисунке 20.

Уравнение (2) имеет ровно два корня только в том случае, когда прямая $y=b$ пересекает график функции $y=f(x)$ ровно в двух точках, т. е. только при $b=-5$ или при $b=-6\frac{1}{8}$.

Ответ. $b=-5$ и $b=-6\frac{1}{8}$.

Пример 3. Найдем все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{49-(x-b)^2}=6-b \qquad (3)$$

имеет единственный корень.

Решение. Для каждого значения b рассмотрим функцию $y=\sqrt{49-(x-b)^2}$. Так как $y\geqslant 0$ для всех $x\in D(y)$, то точками графика этой функции являются только те точки плоскости xOy, координаты которых являются решениями системы

$$\begin{cases}(x-b)^2+y^2=49\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

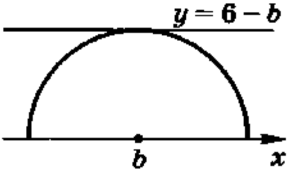

Рис. 21

Поэтому для каждого значения b графиком функции $y=\sqrt{49-(x-b)^2}$ является верхняя полуокружность окружности $(x-b)^2+y^2=49$ с центром $(b;\ 0)$ и радиусом 7 (рис. 21).

Для каждого значения b графиком функции $y=6-b$ является прямая, параллельная оси Ox. Уравнение (3) будет иметь единственный корень лишь тогда, когда эта прямая коснется полуокружности. Это произойдет при условии $6-b=7$, т. е. при $b=-1$.

Ответ. $b=-1$.

10. Предел функции

Пример 1. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-10}{2x-3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-10}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{2x-3}\right)=\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x-3}=3.$$

Пример 2. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-11x^3+12x}{13x^2+14x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-11x^3+12x}{13x^2+14x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-11x+\frac{12}{x}}{13+\frac{14}{x}}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-11x+\frac{12}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(13+\frac{14}{x}\right)}=-\infty.$$

Пример 3. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}(x+5)=10.$

Пример 4. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}4x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x\cdot 4x\cdot\cos 4x\cdot 5}{5x\cdot\sin 4x\cdot 4}=$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\cos 4x\cdot\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}}\times$$

$\times \lim\limits_{x\to 0} \cos 4x = \frac{5}{4}$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0} \cos 4x = 1$.

Пример 5. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$, так как $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$.

11. Обратные функции

Если функция $y = f(x)$ определена и строго монотонна на промежутке J и имеет область изменения — промежуток J_1, то она имеет обратную функцию $\varphi(x)$ с областью определения J_1 и областью изменения J.

Пример. Найдем функцию $y = \varphi(x)$, обратную к данной функции $y = f(x)$, если:

а) $y = 4x - 2$, $x \in [-1;\ 2]$;

б) $y = \frac{5}{x-1} + 4$, $x \in (1;\ +\infty)$;

в) $y = (x-3)^2 + 2$, $x \in [3;\ +\infty)$;

г) $y = 1 + \sqrt{x+2}$, $x \in [-2;\ +\infty)$;

д) $y = 5^{x+2}$; е) $y = \log_2(x-3)$.

Решение. Все функции, рассматриваемые в этом примере, определены и строго монотонны на данных промежутках, поэтому все они имеют обратные функции. Найдем их.

а) Область определения функции — отрезок $[-1;\ 2]$, область изменения — отрезок $[-6;\ 6]$. Выразив x из формулы $y = 4x - 2$ для $x \in [-1;\ 2]$, получим, что

$$x = \frac{y+2}{4}, \text{ где } y \in [-6;\ 6],\ x \in [-1;\ 2]. \qquad (1)$$

Формула (1) задает функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = 4x - 2$, $x \in [-1;\ 2]$. Заменим в формуле (1) x на y и y на x, получим функцию $y = \varphi(x)$:

$$y = \frac{x+2}{4}, \text{ где } x \in [-6;\ 6],$$

обратную к функции $y = 4x - 2$, $x \in [-1;\ 2]$.

б) Область определения функции — промежуток $(1;\ +\infty)$, область изменения — промежуток $(4;\ +\infty)$. Выразив x из формулы $y=\frac{5}{x-1}+4$ для $x\in(1;\ +\infty)$, получим, что

$$x=\frac{5}{y-4}+1, \text{ где } y\in(4;\ +\infty),\ x\in(1;\ +\infty). \qquad (2)$$

Формула (2) задает функцию $x=\varphi(y)$, обратную к функции $y=\frac{5}{x-1}+4$, $x\in(1;\ +\infty)$. Заменим в формуле (2) x на y и y на x, получим функцию $y=\varphi(x)$:

$$y=\frac{5}{x-4}+1, \text{ где } x\in(4;\ +\infty),$$

обратную к функции $y=\frac{5}{x-1}+4$, $x\in(1;\ +\infty)$.

в) Область определения функции — промежуток $[3;\ +\infty)$, область изменения — промежуток $[2;\ +\infty)$. Выразив x из формулы $y=(x-3)^2+2$ для $x\in[3;\ +\infty)$, получим, что

$$x=\sqrt{y-2}+3, \text{ где } y\in[2;\ +\infty),\ x\in[3;\ +\infty). \qquad (3)$$

Формула (3) задает функцию $x=\varphi(y)$, обратную к функции $y=(x-3)^2+2$, $x\in[3;\ +\infty)$. Заменим в формуле (3) x на y и y на x, получим функцию $y=\varphi(x)$:

$$y=\sqrt{x-2}+3, \text{ где } x\in[2;\ +\infty),$$

обратную к функции $y=(x-3)^2+2$, $x\in[3;\ +\infty)$.

г) Область определения функции — промежуток $[-2;\ +\infty)$, область изменения — промежуток $[1;\ +\infty)$. Выразив x из формулы $y=1+\sqrt{x+2}$ для $x\geqslant-2$, получим, что

$$x=(y-1)^2-2, \text{ где } y\in[1;\ +\infty),\ x\in[-2;\ +\infty). \qquad (4)$$

Формула (4) задает функцию $x=\varphi(y)$, обратную к функции $y=1+\sqrt{x+2}$, $x\in[-2;\ +\infty)$. Заменим в формуле (4) x на y и y на x, получим функцию $y=\varphi(x)$:

$$y=(x-1)^2-2, \text{ где } x\in[1;\ +\infty),$$

обратную к функции $y=1+\sqrt{x+2}$, $x\in[-2;\ +\infty)$.

д) Область определения функции — $\boldsymbol{R}$, область изменения — промежуток $(0;\ +\infty)$. Выразив x из формулы $y=5^{x+2}$, получим, что

$$x=\log_5 y-2, \text{ где } y\in(0;\ +\infty),\ x\in\boldsymbol{R}. \qquad (5)$$

Формула (5) задает функцию $x=\varphi(y)$, обратную к функции $y=5^{x+2}$, $x\in\boldsymbol{R}$. Заменим в формуле (5) x на y и y на x, получим функцию $y=\varphi(x)$:

$$y=\log_5 x-2, \text{ где } x\in(0;\ +\infty),$$

обратную к функции $y=5^{x+2}$.

е) Область определения функции — промежуток $(3; +\infty)$, область изменения — $\boldsymbol{R}$. Выразив x из формулы $y=\log_2(x-3)$ для $x>3$, получим, что

$$x=2^y+3, \text{ где } y\in\boldsymbol{R},\ x\in(3;\ +\infty). \qquad (6)$$

Формула (6) задает функцию $x=\varphi(y)$, обратную к функции $y=\log_2(x-3)$, $x\in(3;\ +\infty)$. Заменим в формуле (6) x на y и y на x, получим функцию $y=\varphi(x)$:

$$y=2^x+3, \text{ где } x\in\boldsymbol{R},$$

обратную к функции $y=\log_2(x-3)$, $x\in(3;\ +\infty)$.

12. Производные элементарных функций

Здесь и далее производная функции $f(x)$ находится для тех значений x, при каждом из которых эта функция имеет производную. Для простоты записи сами эти значения не указываются.

Пример 1. Пользуясь определением, найдем производную функции $f(x)=x^2-5x+7$.

Решение. В любой точке $x\in\boldsymbol{R}$ вычислим приращение функции Δf, соответствующее приращению аргумента Δx:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)+7-(x^2-5x+7)=$$
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2-5\Delta x=(2x+\Delta x-5)\Delta x.$$

Вычислим отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=2x+\Delta x-5.$$

Теперь вычислим предел отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-5)=2x-5.$$

Итак, $f'(x)=2x-5$.

Ответ. $f'(x)=2x-5$.

Пример 2. Найдем: а) $f'(x)$; б) $f'(2)$, если $f(x)=x^3-4x^2+3x-11$.

Решение. а) Для каждого $x\in\boldsymbol{R}$ имеем

$$f'(x)=(x^3-4x^2+3x-11)'=(x^3)'-(4x^2)'+(3x)'-(11)'=$$
$$=3x^2-4\cdot 2x+3\cdot 1-0=3x^2-8x+3.$$

б) $f'(2)=3\cdot 2^2-8\cdot 2+3=-1$.

Ответ. а) $f'(x)=3x^2-8x+3$; б) $f'(2)=-1$.

Пример 3. Найдем: а) $f'(x)$; б) $f'(0)$, если $f(x)=5^x\sin x$.

Решение. а) Для каждого $x\in\boldsymbol{R}$ имеем

$$f'(x)=(5^x\cdot\sin x)'=(5^x)'\cdot\sin x+5^x\cdot(\sin x)'=$$
$$=5^x\cdot\ln 5\cdot\sin x+5^x\cdot\cos x.$$

б) $f'(0)=5^0\cdot\ln 5\cdot\sin 0+5^0\cdot\cos 0=1$.

Ответ. а) $f'(x)=5^x\cdot\ln 5\cdot\sin x+5^x\cdot\cos x$; б) $f'(0)=1$.

Пример 4. Найдем: а) $f'(x)$; б) $f'(-2)$, если $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x+1}$.

Решение. а) Для каждого $x\neq-1$ имеем

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2-5}{x+1}\right)'=\frac{(3x^2-5)'\cdot(x+1)-(3x^2-5)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{6x\cdot(x+1)-(3x^2-5)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{6x^2+6x-3x^2+5}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+6x+5}{(x+1)^2}.$$

б) $f'(-2)=\dfrac{3\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)+5}{(-2+1)^2}=5$.

Ответ. а) $f'(x)=\dfrac{3x^2+6x+5}{(x+1)^2}$; б) $f'(-2)=5$.

Пример 5. Найдем: а) $f'(x)$; б) $f'(1)$, если $f(x)=\sqrt{x}$.

Решение. а) Для каждого $x>0$ запишем функцию в виде $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, тогда $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$.

Ответ. а) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

13. Производная сложной функции

Здесь и далее производная функции $y=f(u(x))$ находится как производная сложной функции по формуле $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Пример 1. Найдем производную функции $y=(2x-5)^{20}$.

Решение. $y'_x=(u^{20})'_u\cdot u'_x=20u^{19}\cdot u'_x=20(2x-5)^{19}\cdot(2x-5)'=$ $=20(2x-5)^{19}\cdot 2=40(2x-5)^{19}$, где $u(x)=2x-5$.

Ответ. $40(2x-5)^{19}$.

Пример 2. Найдем производную функции:

а) $y=\sin(4x+5)$; б) $y=\operatorname{ctg}(7x-6)$.

Решение.

а) $y'_x=(\sin u)'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot u'_x=\cos(4x+5)\cdot(4x+5)'=$ $=4\cos(4x+5)$, где $u(x)=4x+5$;

б) $y'_x=(\operatorname{ctg} u)'_u\cdot u'_x=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'_x=-\dfrac{1}{\sin^2(7x-6)}\cdot(7x-6)'=$ $=\dfrac{-7}{\sin^2(7x-6)}$, где $u(x)=7x-6$.

Ответ. а) $4\cos(4x+5)$; б) $\dfrac{-7}{\sin^2(7x-6)}$.

Пример 3. Найдем производную функции:

а) $y=e^{2x-3}$; б) $y=5^{3x+4}$;

в) $y=\ln(5x+6)$; г) $y=\log_3(4x-5)$.

Решение.

а) $y'_x=(e^u)'_u\cdot u'_x=e^u\cdot u'_x=e^{2x-3}\cdot(2x-3)'=2e^{2x-3}$, где $u(x)=2x-3$;

б) $y'_x=(5^u)'_u\cdot u'_x=5^u\cdot\ln 5\cdot u'_x=5^{3x+4}\cdot\ln 5\cdot(3x+4)'=$ $=3\cdot 5^{3x+4}\ln 5$, где $u(x)=3x+4$;

в) $y'_x=(\ln u)'_u\cdot u'_x=\dfrac{1}{u}\cdot u'_x=\dfrac{1}{5x+6}\cdot(5x+6)'=\dfrac{5}{5x+6}$, где $u(x)=5x+6$;

г) $y'_x=(\log_3 u)'_u\cdot u'_x=\dfrac{1}{u\cdot\ln 3}\cdot u'_x=\dfrac{1}{(4x-5)\cdot\ln 3}\cdot(4x-5)'=$ $=\dfrac{4}{(4x-5)\cdot\ln 3}$, где $u(x)=4x-5$.

Ответ. а) $2e^{2x-3}$; б) $3\cdot 5^{3x+4}\cdot\ln 5$; в) $\dfrac{5}{5x+6}$; г) $\dfrac{4}{(4x-5)\cdot\ln 3}$.

Пример 4. Найдем производную функции:

а) $y=\sqrt[3]{x}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. а) Если $x>0$, то функцию можно записать в виде $y=x^{\frac{1}{3}}$. Тогда имеем

$$y'_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Если $x<0$, то $-x>0$, и функцию можно записать в виде $y=-(-x)^{\frac{1}{3}}$. Тогда имеем

$$y'_x=-\frac{1}{3}(u)^{-\frac{2}{3}}\cdot u'=-\frac{1}{3u^{\frac{2}{3}}}\cdot u'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}\cdot(-x)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

где $u(x)=-x$.

Итак, $y'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ для каждого $x\neq 0$.

б) Если $x>0$, то функцию можно записать в виде $y=x^{\frac{2}{3}}$, тогда имеем

$$y'_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Если $x<0$, то функцию можно записать в виде $y=\sqrt[3]{(-x)^2}$, а так как $-x>0$, то в виде $y=(-x)^{\frac{2}{3}}$. Тогда имеем

$$y'_x=\frac{2}{3}(u)^{-\frac{1}{3}}\cdot u'=\frac{2}{3u^{\frac{1}{3}}}\cdot u'=\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}\cdot(-x)'=\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}\cdot(-1)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

где $u(x)=-x$.

Итак, $y'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ для каждого $x\neq 0$.

Ответ. а) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x\neq 0$; б) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $x\neq 0$.

14*. Производная сложной функции (продолжение)

Пример 1. Найдем $f'(2)$, если $f(x)=\sqrt{3x^2-6x+1}$.

Решение. Сначала найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=\left(\sqrt{3x^2-6x+1}\right)'=\left((3x^2-6x+1)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(3x^2-6x+1)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times(3x^2-6x+1)'=\frac{6x-6}{2\sqrt{3x^2-6x+1}}=\frac{3x-3}{\sqrt{3x^2-6x+1}}.$$

Так как $2 \in D(f'(x))$, то $f'(2)=\dfrac{3\cdot 2-3}{\sqrt{3\cdot 2^2-6\cdot 2+1}}=3$.

Ответ. $f'(2)=3$.

Пример 2. Найдем $f'(4)$, если $f(x)=(x^2-3)\cdot\sqrt{x^2+9}$.

Решение. Сначала найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=((x^2-3)\cdot\sqrt{x^2+9})'=(x^2-3)'\cdot\sqrt{x^2+9}+(x^2-3)\cdot(\sqrt{x^2+9})'=$$

$$=2x\cdot\sqrt{x^2+9}+(x^2-3)\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+9)'=2x\sqrt{x^2+9}+$$

$$+\frac{(x^2-3)\cdot 1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+9}}=\frac{2x(x^2+9)+x(x^2-3)}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{3x^3+15x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{3x(x^2+5)}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Так как $4 \in D(f'(x))$, то $f'(4)=\dfrac{3\cdot 4(4^2+5)}{\sqrt{4^2+9}}=\dfrac{12\cdot 21}{5}=50{,}4$.

Ответ. $f'(4)=50{,}4$.

Пример 3. Найдем $f'(13)$, если $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x-3}$.

Решение. Сначала найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{x-3}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x^2-25}\right)'(x-3)-\sqrt{x^2-25}\cdot(x-3)'}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{(x^2-25)'(x-3)}{2\sqrt{x^2-25}}-\sqrt{x^2-25}\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{x^2-3x-x^2+25}{\sqrt{x^2-25}\cdot(x-3)^2}=$$

$$=\frac{-3x+25}{\sqrt{x^2-25}\cdot(x-3)^2}.$$

Так как $13 \in D(f'(x))$, то $f'(13)=\dfrac{-3\cdot 13+25}{\sqrt{13^2-25}\cdot(13-3)^2}=$ $=-\dfrac{7}{600}$.

Ответ. $f'(13)=-\dfrac{7}{600}$.

15. Максимум и минимум функции на отрезке

Пример 1. Дана функция $f(x)=x^3-6x^2+9x+7$.
Найдем:

а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

Решение. а) Производная функции $f(x)$ существует для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Найдем ее:

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x + 7)' = 3x^2 - 12x + 9.$$

Найдем точки, в которых $f'(x) = 0$. Для этого решим уравнение

$$3x^2 - 12x + 9 = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) имеет два корня: 1 и 3. Из этих чисел только число 1 является внутренней точкой отрезка $[-2;\ 2]$. Поэтому $x = 1$ — единственная критическая точка функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

б) Вычислим значения функции $f(x)$ на концах отрезка и в критической точке:

$$f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 9 \cdot (-2) + 7 = -43;$$
$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 7 = 11;$$
$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 7 = 9.$$

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$ равно 11, это значение достигается в точке $x = 1$; наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$ равно -43, это значение достигается в точке $x = -2$:

$$\max_{[-2;\ 2]} f(x) = f(1) = 11; \quad \min_{[-2;\ 2]} f(x) = f(-2) = -43.$$

Ответ. а) $x = 1$; б) $\max\limits_{[-2;\ 2]} f(x) = 11$, $\min\limits_{[-2;\ 2]} f(x) = -43$.

Пример 2. Дана функция $f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$. Найдем:

а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$.

Решение. а) Производная функции $f(x)$ существует для любого $x \neq 0$ (см. п. 13). Следовательно, она существует в любой точке отрезка $[-1;\ 8]$, кроме точки $x = 0$. Поэтому $x = 0$ — критическая точка функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$.

Для любого $x \neq 0$ найдем производную функции $f(x)$: $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

Найдем точки, в которых $f'(x) = 0$. Для этого решим уравнение

$$2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет два корня: 1 и -1. Из этих чисел только число 1 является внутренней точкой отрезка $[-1;\ 8]$. Поэтому $x=1$ — еще одна критическая точка функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$.

Итак, функция $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$ имеет две критические точки: $x=0$ и $x=1$.

б) Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке вычислим ее значения на концах отрезка и в каждой критической точке:

$$f(-1)=(-1)^2-3\sqrt[3]{(-1)^2}=-2;$$

$$f(0)=0^2-3\sqrt[3]{0^2}=0;$$

$$f(1)=1^2-3\sqrt[3]{1^2}=-2;$$

$$f(8)=8^2-3\sqrt[3]{8^2}=52.$$

Итак, $\max\limits_{[-1;\ 8]} f(x)=52$, $\min\limits_{[-1;\ 8]} f(x)=-2$.

Ответ. а) $x=0$ и $x=1$; б) $\max\limits_{[-1;\ 8]} f(x)=52$, $\min\limits_{[-1;\ 8]} f(x)=-2$.

Пример 3. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^5-10x^3+50x-10$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

Решение. Производная функции $f(x)$ существует для любого $x\in \boldsymbol{R}$. Найдем ее:

$$f'(x)=(x^5-10x^3+50x-10)'=5x^4-30x^2+50.$$

Производная функции $f(x)$ не обращается в нуль ни для какого x, так как $5x^4-30x^2+50=5(x^4-6x^2+9)+5=$ $=5(x^2-3)^2+5>0$ для любого действительного числа x. Следовательно, функция $f(x)$ не имеет критических точек. Наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[-1;\ 1]$ она достигает на концах этого отрезка.

Вычислим значения функции $f(x)$ на концах отрезка:

$$f(-1)=(-1)^5-10\cdot(-1)^3+50\cdot(-1)-10=-51;$$

$$f(1)=1^5-10\cdot 1^3+50\cdot 1-10=31.$$

Итак, $\max\limits_{[-1;\ 1]} f(x)=31$, $\min\limits_{[-1;\ 1]} f(x)=-51$.

Ответ. $\max\limits_{[-1;\ 1]} f(x)=31$, $\min\limits_{[-1;\ 1]} f(x)=-51$.

16. Уравнение касательной к графику функции

Пример 1. Дана функция $f(x)=3x^2+4x-5$. Напишем уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Производная функции $f(x)$ существует для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Найдем ее:

$$f'(x)=(3x^2+4x-5)'=6x+4.$$

Тогда $f(x_0)=f(1)=2$; $f'(x_0)=f'(1)=10$. Уравнение касательной имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),$$
$$y=10(x-1)+2,$$
$$y=10x-8.$$

Ответ. $y=10x-8$.

Пример 2. Дана функция $f(x)=x^3-3x^2+2x+5$. Напишем уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной прямой $y=2x-11$.

Решение. Производная функции $f(x)$ существует для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Найдем ее:

$$f'(x)=(x^3-3x^2+2x+5)'=3x^2-6x+2.$$

Так как касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 параллельна прямой $y=2x-11$, то ее угловой коэффициент равен 2, т. е. $f'(x_0)=2$. Найдем эту абсциссу из условия, что $3x_0^2-6x_0+2=2$. Это равенство справедливо лишь при $x_0=0$ и при $x_0=2$. Так как в том и в другом случае $f(x_0)=5$, то прямая $y=2x+b$ касается графика функции или в точке (0; 5), или в точке (2; 5).

В первом случае верно числовое равенство $5=2\cdot 0+b$, откуда $b=5$, а во втором случае верно числовое равенство $5=2\cdot 2+b$, откуда $b=1$.

Итак, существуют две касательные $y=2x+5$ и $y=2x+1$ к графику функции $y=f(x)$, параллельные прямой $y=2x-11$.

Ответ. $y=2x+5$, $y=2x+1$.

Пример 3. Дана функция $f(x)=x^2-6x+7$. Напишем уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящей через точку $A(2; -5)$.

Решение. Так как $f(2)\neq -5$, то точка A не принадлежит графику функции $y=f(x)$. Пусть x_0 — абсцисса точки касания.

Производная функции $f(x)$ существует для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Найдем ее:

$$f'(x)=(x^2-6x+7)'=2x-6.$$

Тогда $f(x_0)=x_0^2-6x_0+7$; $f'(x_0)=2x_0-6$. Уравнение касательной имеет вид

$$y=(2x_0-6)(x-x_0)+x_0^2-6x_0+7,$$
$$y=(2x_0-6)x-x_0^2+7.$$

Так как точка A принадлежит касательной, то справедливо числовое равенство

$$-5=(2x_0-6)\cdot 2-x_0^2+7,$$

откуда $x_0=0$ или $x_0=4$. Это означает, что через точку A можно провести две касательные к графику функции $y=f(x)$.

Если $x_0=0$, то уравнение касательной имеет вид $y=-6x+7$. Если $x_0=4$, то уравнение касательной имеет вид $y=2x-9$.

Ответ. $y=-6x+7$, $y=2x-9$.

Пример 4. Даны функции $f(x)=x^2-2x+2$ и $g(x)=-x^2-3$. Напишем уравнение общей касательной к графикам этих функций.

Решение. Пусть x_1 — абсцисса точки касания искомой прямой с графиком функции $y=f(x)$, а x_2 — абсцисса точки касания той же прямой с графиком функции $y=g(x)$.

Производная функции $f(x)$ существует для любого $x\in\boldsymbol{R}$. Найдем ее:

$$f'(x)=(x^2-2x+2)'=2x-2.$$

Тогда $f(x_1)=x_1^2-2x_1+2$; $f'(x_1)=2x_1-2$. Уравнение касательной имеет вид

$$y=(2x_1-2)(x-x_1)+x_1^2-2x_1+2,$$

$$y=(2x_1-2)x-x_1^2+2. \qquad (1)$$

Производная функции $g(x)$ существует для любого $x\in\boldsymbol{R}$. Найдем ее:

$$g'(x)=(-x^2-3)'=-2x.$$

Тогда $g(x_2)=-x_2^2-3$; $g'(x_2)=-2x_2$. Уравнение касательной имеет вид

$$y=-2x_2(x-x_2)-x_2^2-3,$$

$$y=-2x_2x+x_2^2-3. \qquad (2)$$

Очевидно, что уравнения (1) и (2) являются уравнениями одной и той же прямой при выполнении двух условий: $2x_1-2=-2x_2$ и $-x_1^2+2=x_2^2-3$. Решив систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2, получим или $x_1=2$, $x_2=-1$, или $x_1=-1$, $x_2=2$. Это означает, что существуют две общие касательные к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Подставив $x_2=-1$, затем $x_2=2$ в уравнение (2), получим уравнения двух касательных: $y=2x-2$ и $y=-4x+1$.

Ответ. $y=2x-2$, $y=-4x+1$.

17. Приближенные вычисления

Пример 1. Вычислим приближенное значение $f(x_0+\Delta x)$ функции:

а) $f(x)=x^8$, если $x_0=1$, $\Delta x=0{,}01$;

б) $f(x)=\sqrt{x}$, если $x_0=81$, $\Delta x=-0{,}06$.

Решение. Приближенное значение функции $f(x_0)$ будем вычислять по формуле

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

а) Производная функции $f(x)$ существует для любого $x\in\boldsymbol{R}$. Найдем ее: $f'(x)=8x^7$.

По формуле (1) имеем $f(1+0{,}01)\approx f(1)+f'(1)\cdot 0{,}01=$ $=1^8+8\cdot 1^7\cdot 0{,}01=1{,}08$.

б) Производная функции $f(x)$ существует для любого $x>0$. Найдем ее: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. По формуле (1) имеем

$$f(81-0{,}06)\approx f(81)+f'(81)(-0{,}06)=$$
$$=\sqrt{81}+\frac{1}{2\sqrt{81}}\cdot(-0{,}06)\approx 8{,}997.$$

Ответ. а) 1,08; б) 8,997.

Пример 2. Вычислим приближенно $\operatorname{tg} 47°$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{tg} x$. Выразим величину данного угла в радианах: $47°=45°+2°=\dfrac{\pi}{4}+$ $+\dfrac{\pi}{90}$. Пусть $x_0=\dfrac{\pi}{4}$, а $\Delta x=\dfrac{\pi}{90}$. Производная функции $f(x)$ существует для любого $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Найдем ее: $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. По формуле (1) имеем

$$f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right)\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{90}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{90}\approx$$
$$\approx 1+2\cdot\frac{3{,}14}{90}\approx 1{,}07.$$

Ответ. $\operatorname{tg} 47°\approx 1{,}07$.

18. Исследование функций с помощью производной

Пример 1. Исследуем на монотонность и экстремумы функцию $f(x)=x^3-3\ln x$.

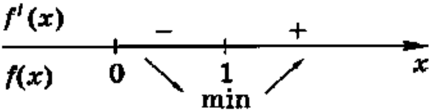

Рис. 22

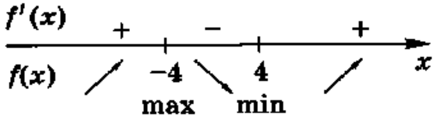

Рис. 23

Решение. Функция $f(x)$ определена для всех $x>0$, т. е. $D(f)=(0;\ +\infty)$. Производная существует в каждой точке промежутка $(0;\ +\infty)$, найдем ее:

$$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}.$$

Так как $f'(x)=0$ лишь при $x=1$, то функция $f(x)$ имеет единственную критическую точку $x=1$.

При $x>1$ производная $f'(x)$ положительна, а при $0<x<1$ отрицательна, следовательно, на промежутке $(0;\ 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1;\ +\infty)$ возрастает (рис. 22). Точка $x=1$ — точка локального минимума функции. Так как она единственная, то в ней функция достигает своего наименьшего значения (минимума): $f(1)=1^3-3\ln 1=1$.

Ответ. На промежутке $(0;\ 1]$ функция убывает; на промежутке $[1;\ +\infty)$ возрастает; наименьшее значение, равное 1, функция достигает в точке $x=1$.

Пример 2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{-16x}{x^2+16}$.

Решение. Функция $f(x)$ определена для всех $x\in\boldsymbol{R}$. Производная существует в каждой точке области определения функции, найдем ее:

$$f'(x)=\frac{-16(x^2+16)+16x\cdot 2x}{(x^2+16)^2}=\frac{16(x-4)(x+4)}{(x^2+16)^2}.$$

Так как $f'(x)=0$ лишь при $x=4$ и при $x=-4$, то функция $f(x)$ имеет две критические точки $x=4$ и $x=-4$.

При $x<-4$ и при $x>4$ производная $f'(x)$ положительна, а при $-4<x<4$ отрицательна, следовательно, на промежутках $(-\infty;\ -4]$ и $[4;\ +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $[-4;\ 4]$ убывает (рис. 23). Точка $x=-4$ — точка локального максимума функции, а точка $x=4$ — точка локального минимума.

Так как $f(x)=0$ при $x=0$, $f(x)<0$ при $x>0$ и $f(x)>0$ при $x<0$, то в точке локального минимума $x=4$ функция достигает своего наименьшего значения $f(4)=-2$, а в точке локального максимума $x=-4$ она достигает своего наибольшего значения $f(-4)=2$.

Ответ. Наибольшее значение функции равно 2, наименьшее значение функции равно -2.

Пример 3*. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции

$$y=x^3-3x^2+9x-4.$$

Решение. Функция $f(x)=x^3-3x^2+9x-4$ определена для всех $x\in \boldsymbol{R}$. Производная существует в каждой точке области определения функции, найдем ее:

$$f'(x)=(x^3-3x^2+9x-4)'=3x^2-6x+9.$$

Найдем вторую производную:

$$f''(x)=(3x^2-6x+9)'=6x-6.$$

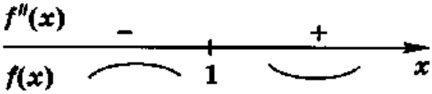

Рис. 24

Вторая производная обращается в нуль только в точке $x=1$. Определим знак второй производной на каждом из интервалов $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$ (рис. 24).

Вторая производная функции $f(x)$ в точке $x=1$ меняет знак, следовательно, $x=1$ — точка перегиба графика этой функции. На интервале $(-\infty;\ 1)$ вторая производная отрицательна, поэтому график функции $y=f(x)$ имеет выпуклость вверх. На интервале $(1;\ +\infty)$ вторая производная положительна, поэтому график функции $y=f(x)$ имеет выпуклость вниз.

Ответ. График функции имеет выпуклость вверх на интервале $(-\infty;\ 1)$; выпуклость вниз на интервале $(1;\ +\infty)$; $x=1$ — точка перегиба.

19. Задачи на максимум и минимум

Пример 1. Число 76 представим в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы сумма квадратов всех слагаемых была наименьшей, а отношение первого числа ко второму было равно $2:3$.

Решение. Обозначим первые два числа через $2x$ и $3x$, где x — коэффициент пропорциональности. Так как $2x$ и $3x$ положительны, то $x>0$. Тогда третье число равно $76-2x-3x=76-5x$, а так как разность $76-5x$ положительна, то $x<15{,}2$. Вычислим сумму квадратов трех чисел:

$$(2x)^2+(3x)^2+(76-5x)^2=38x^2-760x+76^2=$$
$$=38(x^2-20x+152)=38((x-10)^2+52).$$

Сумма квадратов трех чисел будет наименьшей при том значении x, при котором функция $f(x)=38((x-10)^2+52)$

на интервале (0; 15,2) достигает своего наименьшего значения. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ эта функция принимает наименьшее значение только при $x_0 = 10$.

Так как $10 \in (0;\ 15{,}2)$, то на промежутке (0; 15,2) существует единственная точка $x_0 = 10$, в которой функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения.

Следовательно, число 76 можно единственным образом представить в виде суммы согласно условиям задачи так: $76 = 20 + 30 + 26$.

Ответ. $76 = 20 + 30 + 26$.

Пример 2. Число 90 представим в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы первое число было в 2 раза больше второго, а произведение всех трех чисел было наибольшим.

Решение. Обозначим первые два числа через $2x$ и x $(x > 0)$. Тогда третье число равно $90 - 3x$, а так как $90 - 3x > 0$, то $x < 30$. Вычислим произведение трех чисел:

$$2x \cdot x \cdot (90 - 3x) = 180x^2 - 6x^3 = 6(30x^2 - x^3).$$

Произведение трех чисел будет наибольшим при том значении x, при котором функция $f(x) = 30x^2 - x^3$ достигает своего наибольшего значения на интервале (0; 30).

Производная функции $f(x)$ существует в любой точке промежутка (0; 30), вычислим ее: $f'(x) = (30x^2 - x^3)' = 60x - 3x^2$. Производная обращается в нуль только в одной точке $x_0 = 20$ этого промежутка. Это единственная критическая точка функции на промежутке (0; 30). Определим знак производной на интервалах (0; 20) и (20; 30) и промежутки монотонности функции $f(x)$ (рис. 25).

Так как в точке $x_0 = 20$ производная меняет знак с «+» на «−», то $x_0 = 20$ — точка локального максимума функции, а так как она единственная, то в ней функция достигает своего наибольшего значения.

Следовательно, число 90 можно единственным образом представить в виде суммы согласно условиям задачи так: $90 = 40 + 20 + 30$.

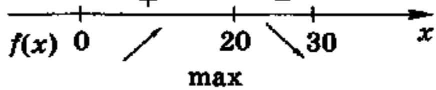

Рис. 25

Ответ. $90 = 40 + 20 + 30$.

Пример 3. Произведение трех последовательных членов геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем равно 343. Найдем наибольшую сумму этих трех членов среди всех прогрессий, обладающих указанными свойствами.

Решение. Обозначим три последовательных члена геометрической прогрессии через $\frac{a}{q}$, a, aq, где q — знаменатель этой прогрессии. По условию задачи $\frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 343$, откуда $a = 7$. Тогда сумма трех членов прогрессии равна $\frac{7}{q} + 7 + 7q = 7\left(q + \frac{1}{q}\right) + 7$.

Так как для любого отрицательного числа q справедливо неравенство $q + \frac{1}{q} \leqslant -2$, причем $q + \frac{1}{q} = -2$ лишь при $q = -1$, то функция $f(q) = 7\left(q + \frac{1}{q}\right) + 7$, $q < 0$, достигает наибольшего значения в единственной точке $q = -1$. Следовательно, наибольшая искомая сумма равна $f(-1) = 7\left(q + \frac{1}{q}\right) + 7 = -7$.

Ответ. -7.

Замечание. Для решения задач 1 и 3 можно применить производную.

20*. Геометрические задачи на максимум и минимум

Пример 1. В пирамиде $SABC$ ребра SA и BC перпендикулярны, $SA = 5$, $BC = 6$. Определим наибольшую площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной прямым SA и BC.

Решение. Так как через ребро AS, параллельное плоскости сечения, проходят плоскости SAB и SAC, пересекающие плоскость сечения по прямым KN и LM, то KN и LM параллельны AS (рис. 26). Тогда $KN \parallel LM$. Аналогично доказывается, что $KL \parallel MN$. Следовательно, четырехугольник $MNKL$ является параллелограммом, а так как SA и BC перпендикулярны по условию задачи, то этот параллелограмм является прямоугольником и его площадь равна $MN \cdot NK$.

Рис. 26

Обозначим $x = MN$, $y = NK$. Тогда $0 < x < 6$, а из подобия треугольников ANM и ABC следует, что

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AN}, \text{ т. е. } \frac{6}{x} = \frac{AN + NB}{AN} = 1 + \frac{NB}{AN},$$

откуда $\frac{NB}{AN} = \frac{6 - x}{x}$.

Аналогично из подобия треугольников NBK и ABS следует, что $\frac{NB}{AN} = \frac{y}{5 - y}$.

Теперь из равенства $\frac{6-x}{x}=\frac{y}{5-y}$ выразим y через x:

$$y=\frac{5}{6}(6-x).$$

Выразим площадь сечения через x: $S=xy=\frac{5}{6}(6x-x^2)$, где $0<x<6$. Площадь сечения будет наибольшей при том значении $x\in(0;\ 6)$, при котором функция $f(x)=6x-x^2$ достигает своего наибольшего значения на интервале $(0;\ 6)$.

Функция $f(x)=9-(x-3)^2$ достигает наибольшего значения в точке $x_0=3$, принадлежащей интервалу $(0;\ 6)$.

Следовательно, наибольшая площадь сечения равна $\frac{5}{6}(6\cdot 3-3^2)=7{,}5$.

Ответ. 7,5.

Пример 2. Дана прямоугольная система координат xOy. Выясним, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;\ 1)$, а катеты лежат на прямых $x=-2$ и $y=0$.

Решение. Изобразим один из возможных прямоугольных треугольников — треугольник ABD (рис. 27). Так как координаты точек M и C есть $(0;\ 1)$ и $(-2;\ 1)$ соответственно, то $MO=1$, $OD=MC=2$. Обозначим $AC=t$ $(t>0)$, тогда из подобия треугольников ACM и MOB следует, что $\frac{AC}{MO}=\frac{MC}{BO}$, откуда получим, что $BO=\frac{MC\cdot MO}{AC}=\frac{2}{t}$.

Площадь S треугольника ADB равна

$$\frac{AD\cdot DB}{2}=\frac{1}{2}(t+1)\left(\frac{2}{t}+2\right)=t+\frac{1}{t}+2.$$

Так как для любого $t>0$ справедливо неравенство $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$, причем $t+\frac{1}{t}=2$ только при $t=1$, то для $t>0$ функция $t+\frac{1}{t}+2$ достигает своего наименьшего значения 4 при $t=1$. Поэтому наименьшее значение площади равно 4.

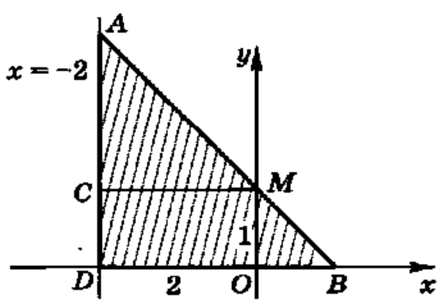

Рис. 27

Заметим, что если в данной задаче обозначить $OB=t$, то аналогичными рассуждениями можно получить, что $S=t+\frac{4}{t}=$

$=2\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)$. Тогда из неравенства $\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\geqslant 2$ следует, что $S\geqslant 4$.

Ответ. 4.

Пример 3. Найдем наибольший объем правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна $4\sqrt{3}$.

Решение. Пусть высота CC_1 правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна x (рис. 28). По смыслу задачи $0<x<4\sqrt{3}$. Тогда диагональ квадрата $ABCD$ равна $AC=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-x^2}=\sqrt{48-x^2}$. А площадь этого квадрата равна $0{,}5AC^2=0{,}5(48-x^2)$ и объем призмы равен

$$V=0{,}5x(48-x^2)=0{,}5(48x-x^3).$$

Рассмотрим функцию $V(x)=0{,}5(48x-x^3)$, $0<x<4\sqrt{3}$. Ее производная существует для любого $x\in(0;\ 4\sqrt{3})$ и равна $V'(x)=0{,}5(48-3x^2)=1{,}5(16-x^2)$.

Производная обращается в нуль только в одной точке $x_0=4$ промежутка $(0;\ 4\sqrt{3})$. Это единственная критическая точка функции на этом промежутке. Определим знак производной на интервалах $(0;\ 4)$ и $(4;\ 4\sqrt{3})$ и промежутки монотонности функции $f(x)$ (рис. 29).

Так как в точке $x_0=4$ производная меняет знак с «+» на «−», то $x_0=4$ — точка локального максимума функции, а так как она единственная, то в ней функция достигает своего наибольшего значения.

Следовательно, объем призмы будет наибольшим, если его высота равна 4. Тогда наибольший объем призмы равен $V(4)=0{,}5(48\cdot 4-4^3)=64$.

Ответ. 64.

Замечание. Нетрудно убедиться, что $AB=AD=AA_1=4$, т. е. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

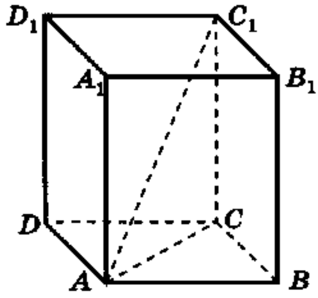

Рис. 28

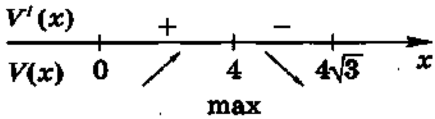

Рис. 29

21*. Задачи на смеси (на максимум и минимум)

Пример 1. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 40% олова и 60% свинца, второй — 20% свинца и 80% цинка, третий — 20% олова, 20% свинца и 60% цинка. Сплавив их, получили сплав, содержащий 10% олова. Определим, какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание свинца может быть в этом сплаве.

Решение. Пусть первого, второго и третьего сплавов взяли a кг, b кг и c кг соответственно. Так как сплав, составленный только из первого и третьего сплавов, содержит от 20 до 40% олова, то требуемый сплав невозможно получить только из первого и третьего сплавов. Это означает, что $b \neq 0$. Процентное содержание свинца — это отношение, которое не изменится, если вместо a кг, b кг и c кг от этих трех сплавов взять $\frac{a}{b}$ кг, 1 кг и $\frac{c}{b}$ кг соответственно. Поэтому будем считать, что первого сплава взяли x кг, второго — 1 кг, а третьего — y кг. При этом $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Из условия задачи следует, что

$$0{,}4x + 0{,}2y = 0{,}1(x + 1 + y),$$

откуда $y = 1 - 3x$. Так как $y \geqslant 0$, то $x \leqslant \frac{1}{3}$.

Вычислим процентное содержание свинца в сплаве и выразим эту величину как функцию от x:

$$p = \frac{(0{,}6x + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}2y) \cdot 100}{x + 1 + y} = \frac{60x + 20 + 20y}{x + 1 + y} =$$

$$= \frac{60x + 20 + 20 - 60x}{x + 1 + 1 - 3x} = \frac{-20}{x - 1}.$$

Функция $p(x) = \frac{-20}{x-1}$ возрастает на отрезке $\left[0;\ \frac{1}{3}\right]$, так как ее производная $p'(x) = \frac{20}{(x-1)^2}$ на интервале $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$ положительна. Следовательно, наименьшее значение функции $p(x)$ достигает в точке $x = 0$, а наибольшее — в точке $x = \frac{1}{3}$. Но тогда $p(0) = 20$, $p\left(\frac{1}{3}\right) = 30$.

Итак, наибольшее процентное содержание свинца в полученном сплаве может составить 30%, а наименьшее — 20%.

Ответ. 30%, 20%.

Пример 2. В два сосуда налиты различные растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. Определим наибольшее количество испарившейся воды из обоих сосудов вместе, если известно, что $pq=9$.

Решение. Так как после выпаривания воды масса соли в первом сосуде осталась прежней, а процентное содержание соли увеличилось в p раз, то масса первого раствора уменьшилась в p раз. Аналогично масса второго раствора уменьшилась в q раз. Тогда всего испарилось $m=5+20-\frac{5}{p}-\frac{20}{q}$ кг воды. Так как по условию задачи $pq=9$, то $q=\frac{9}{p}$.

С помощью производной нетрудно найти наибольшее значение функции $m(p)=25-\frac{5}{p}-\frac{20p}{9}$. Но можно обойтись и без производной. Заметим, что функция $m(p)=$ $=25-\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{3}{2p}+\frac{2p}{3}\right)$ достигает наибольшего значения при таком значении p, при котором функция $f(p)=\frac{3}{2p}+\frac{2p}{3}$ достигает наименьшего значения. Так как $\frac{3}{2p}>0$, то сумма $\frac{3}{2p}+\frac{2p}{3}\geqslant 2$, причем $\frac{3}{2p}+\frac{2p}{3}=2$ при условии, что $\frac{3}{2p}=1$, т. е. при $p=1{,}5$.

Итак, наибольшее значение функции $m(p)$ равно $25-\frac{10}{3}\cdot 2=18\frac{1}{3}$, поэтому наибольшее количество испарившейся воды из обоих сосудов вместе равно $18\frac{1}{3}$ кг.

Ответ. $18\frac{1}{3}$ кг.

22. Исследование функции с помощью производной и построение ее графика

Пример 1. Построим график функции $y=\frac{1}{2}(x^2-4)^2$.

Решение. Эту функцию можно задать формулой $f(x)=\frac{1}{2}(x^4-8x^2+16)$. Она определена для всех $x\in \boldsymbol{R}$ и непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Эта функция четная, так как для любого $x\in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство $f(-x)=f(x)$, следователь-

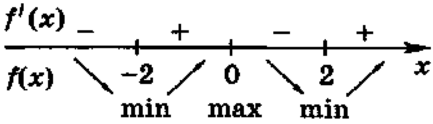

Рис. 30

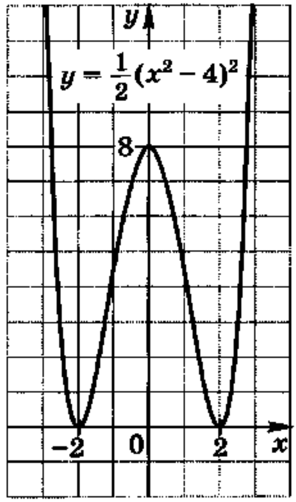

Рис. 31

но, график функции симметричен относительно оси Oy. Функция имеет нули $x=-2$ и $x=2$, принимает неотрицательные значения, ее график пересекает ось Oy в точке $(0;\ 8)$.

Производная функции $f(x)$ существует для любого $x \in \boldsymbol{R}$, найдем ее:

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^4-8x^2+16)'=$$
$$=2x^3-8x=2x(x-2)(x+2).$$

Производная обращается в нуль только в трех точках: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$, т. е. функция имеет три критические точки. Определим знак производной на интервалах $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$ и промежутки монотонности функции $f(x)$ (рис. 30).

Функция возрастает на промежутках $[-2;\ 0]$ и $[2;\ +\infty)$ и убывает на промежутках $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ 2]$. В точках $x=-2$ и $x=2$ она имеет локальные минимумы, в точке $x=0$ — локальный максимум.

Вычислим координаты нескольких точек графика для $x \geqslant 0$:

$$f(0)=8,\ f(1)=4{,}5,\ f(2)=0,\ f(3)=12{,}5.$$

Построим график функции сначала для $x \geqslant 0$, потом симметрично отобразим его относительно оси Oy. Получим график функции $y=f(x)$ (рис. 31).

Пример 2*. Построим график функции $y=\dfrac{x^2+x-5}{x-1}$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{x^2+x-5}{x-1}$ определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x=1$, она непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$.

Выясним, имеет ли график функции наклонную асимптоту $y=kx+b$. Так как

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-5}{x^2-x}=1$, то $k=1$, а так как

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{x-1}=2$, то $b=2$, т. е.

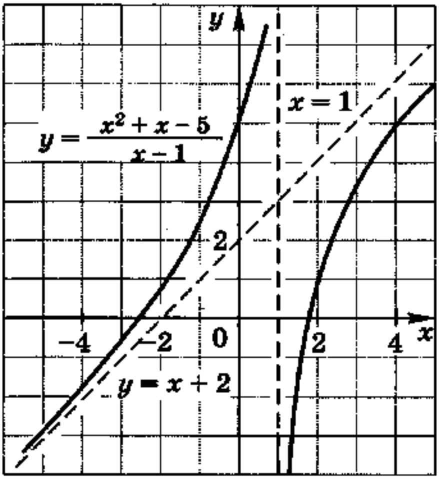

Рис. 32

график функции имеет наклонную асимптоту

$$y=x+2$$

(при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$).

График функции $y=f(x)$ имеет и вертикальную асимптоту $x=1$, так как функция непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$ и

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty,$$

$$\text{а}\ \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty.$$

Производная функции $f(x)$ существует для любого $x\neq1$, найдем ее:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x-5)\cdot1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2+3}{(x-1)^2}.$$

Производная положительна для любого x из области определения функции, поэтому функция возрастает на каждом из интервалов $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$.

Вычислим координаты нескольких точек графика:

x	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
y	$-1{,}4$	$-0{,}25$	1	$2{,}5$	5	1	$3{,}5$	5

Построим график функции $y=f(x)$ (рис. 32).

23*. Решение задач с помощью производной

Пример 1. Сравним числа π^e и e^π.

Решение. Так как числа π^e и e^π положительные, то большему из них соответствует больший натуральный логарифм и наоборот. Поэтому знак сравнения между данными числами такой же, как и между числами каждой следующей пары:

$$\ln\pi^e \text{ и } \ln e^\pi,\quad e\ln\pi \text{ и } \pi\ln e,\quad \frac{\ln\pi}{\pi} \text{ и } \frac{\ln e}{e}.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, она определена и непрерывна для всех $x>0$. Производная функции $f(x)$ существует в любой точке промежутка $(0; +\infty)$, найдем ее:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

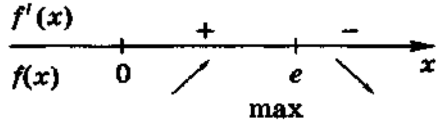

Рис. 33

Производная обращается в нуль только в одной точке $x_0 = e$ этого промежутка. Это единственная критическая точка функции $f(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$. Определим знак производной $f'(x)$ на интервалах $(0; e)$ и $(e; +\infty)$ и промежутки монотонности функции $f(x)$ (рис. 33).

Так как в точке $x_0 = e$ производная меняет знак с «+» на «−», то $x_0 = e$ — точка локального максимума функции, а так как она единственная, то в ней функция достигает своего наибольшего значения.

Таким образом, для любого x из интервалов $(0; e)$ и $(e; +\infty)$ справедливо неравенство $f(x) < f(e)$, в частности $f(\pi) < f(e)$ или $\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$, но тогда справедливо неравенство $\pi^e < e^\pi$.

Ответ. $\pi^e < e^\pi$.

Пример 2. Определим промежуток значений x, для каждого из которых верно равенство

$$\arcsin(x+0,1) + \arccos(x+0,1) = \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin(x+0,1) + \arccos(x+0,1)$, она определена для всех таких x, для которых справедливо двойное неравенство $-1 \leqslant x+0,1 \leqslant 1$, т. е. $D(f) = [-1,1; 0,9]$. Эта функция имеет производную для каждого $x \in (-1,1; 0,9)$. Найдем ее:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+0,1)'}{\sqrt{1-(x+0,1)^2}} - \frac{1\cdot(x+0,1)'}{\sqrt{1-(x+0,1)^2}} = 0.$$

Так как производная функции $f(x)$ равна нулю на всем интервале $(-1,1; 0,9)$, то функция — постоянная на этом интервале, т. е. для каждого значения $x \in (-1,1; 0,9)$ функция принимает одно и то же значение C. Определим его для какого-нибудь значения x из этого промежутка. Например, для $x = -0,1$:

$$C = f(-0,1) = \arcsin(-0,1+0,1) + \arccos(-0,1+0,1) =$$
$$= \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Тем самым доказано, что равенство (1) верно для $x \in (-1,1; 0,9)$.

Так как $f(-0,1) = f(0,9) = \frac{\pi}{2}$, то равенство (1) верно и

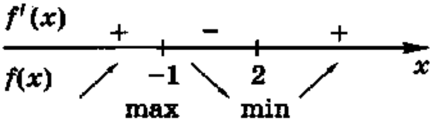

Рис. 34

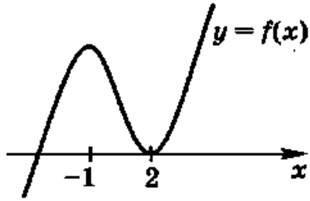

Рис. 35

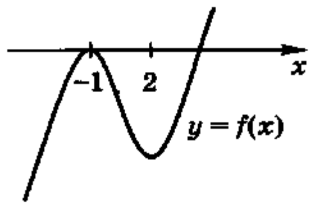

Рис. 36

для $x=-1{,}1$ и для $x=0{,}9$. Следовательно, равенство (1) верно для любых $x \in D(f)$, т. е. оно верно только для любых $x \in [-1{,}1;\ 0{,}9]$.

Ответ. $x \in [-1{,}1;\ 0{,}9]$.

Пример 3. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2x^3-3x^2-12x+a=0$$

имеет ровно два корня.

Решение. При каждом a рассмотрим функцию $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$, она определена для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Производная функции $f(x)$ существует для любого $x \in \boldsymbol{R}$, вычислим ее:

$$f'(x)=(2x^3-3x^2-12x+a)'=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1).$$

Так как производная функции $f(x)$ равна нулю лишь при $x=-1$ и при $x=2$, то эта функция имеет только две критические точки $x=-1$ и $x=2$.

Определим знак производной на каждом из интервалов $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$ и промежутки монотонности функции $f(x)$ (рис. 34).

При $x<-1$ и при $x>2$ производная положительна, а при $-1<x<2$ отрицательна, следовательно, на промежутках $(-\infty;\ -1]$ и $[2;\ +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $[-1;\ 2]$ убывает (см. рис. 34). Точка $x=-1$ — точка локального максимума функции, а точка $x=2$ — точка локального минимума. Уравнение имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий: $f(2)=0$ (рис. 35) или $f(-1)=0$ (рис. 36).

Найдем a, при котором $f(-1)=0$:

$$2\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+a=0, \text{ это есть } a=-7.$$

Найдем a, при котором $f(2)=0$:

$$2\cdot 2^3-3\cdot 2^2-12\cdot 2+a=0, \text{ это есть } a=20.$$

Итак, уравнение $2x^3-3x^2-12x+a=0$ имеет ровно два корня при $a=-7$ и при $a=20$.

Ответ. При $a=-7$ и при $a=20$.

24. Первообразная. Неопределенный интеграл

Пример 1. Докажем, что функция

$$F(x)=\frac{7x^4}{4}+\frac{3}{x^2}+\ln x-7x+9$$

есть первообразная для функции $f(x)=7x^3-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x}-7$ на интервале $(0;+\infty)$.

Решение. Производная функции $F(x)$ существует для каждого $x\in(0;+\infty)$, найдем ее:

$$F'(x)=\left(\frac{7x^4}{4}+\frac{3}{x^2}+\ln x-7x+9\right)'=\frac{7}{4}\cdot 4x^3+3(x^{-2})'+$$
$$+\frac{1}{x}-7+0=7x^3-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x}-7=f(x).$$

Так как функция $F(x)$ определена на интервале $(0;+\infty)$ и ее производная на этом интервале есть $f(x)$, то $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(0;+\infty)$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Найдем первообразную для функции $f(x)=\sin x-\cos 5x+10^x-\sqrt{x}+\frac{7}{x}$ на интервале $(0;+\infty)$.

Решение. Функция $f(x)$ определена на интервале $(0;+\infty)$. Найдем ее первообразную на этом интервале:

$$F(x)=-\cos x-\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+7\ln|x|+C=$$

$$=-\cos x-\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+7\ln x+C,$$

так как $|x|=x$ на интервале $(0;+\infty)$, где C — некоторое число.

Пример 3. Найдем ту первообразную для функции $f(x)=\sin 6x$, график которой проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{6};\,3\right)$.

Решение. Первообразная для функции $f(x)=\sin 6x$ на интервале $(-\infty;+\infty)$ есть функция $F(x)=-\frac{1}{6}\cos 6x+C$, где C — некоторое число. Найдем такое число C, для которого верно равенство $3=-\frac{1}{6}\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)+C$, это $C=2\frac{5}{6}$. Тогда искомая первообразная есть $F(x)=-\frac{1}{6}\cos 6x+2\frac{5}{6}$.

Пример 4. Найдем $\int\sqrt{12x-13}\,dx$.

Решение. $\int\sqrt{12x-13}\,dx=\int(12x-13)^{\frac{1}{2}}\,dx=$

$=\dfrac{(12x-13)^{\frac{3}{2}}}{12\cdot\frac{3}{2}}+C=\dfrac{\sqrt{(12x-13)^3}}{18}+C$, где C — некоторое число.

25*. Нахождение неопределенных интегралов с помощью подстановки

Пример 1. Найдем:

а) $\int\dfrac{x}{x^2+1}\,dx$; б) $\int\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx$; в) $\int\sin^3x\cos x\,dx$.

Решение. а) Сделаем подстановку: $t=x^2+1$, тогда $dt=(x^2+1)'\,dx=2x\,dx$, откуда $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dt$. Итак,

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}\,dt}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C, \text{ где } C \text{ — некоторое число.}$$

б) *1-й способ.* Сделаем подстановку: $t=2x^2+3$, тогда $dt=(2x^2+3)'\,dx=4x\,dx$, откуда $xdx=\dfrac{1}{4}\,dt$. Итак,

$$\int\frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx=\int\frac{\frac{1}{4}dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=$$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{t}+C=\dfrac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$, где C — некоторое число.

2-й способ. Сделаем подстановку: $t=\sqrt{2x^2+3}$, тогда $dt=(\sqrt{2x^2+3})'\,dx=\dfrac{(2x^2+3)'}{2\sqrt{2x^2+3}}\,dx=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx$; $\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx=\dfrac{1}{2}\,dt$.

Итак, $\int\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx=\int\dfrac{1}{2}\,dt=\dfrac{1}{2}\,t+C=\dfrac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$,

где C — некоторое число.

в) Подстановка: $t=\sin x$, тогда $dt=(\sin x)'\,dx=\cos x\,dx$.

Итак, $\int\sin^3x\cos x\,dx=\int t^3\,dt=\dfrac{t^4}{4}+C=\dfrac{1}{4}\sin^4x+C$,

где C — некоторое число.

Пример 2. Найдем:

а) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. а) Подынтегральная функция $y=\sqrt{1-x^2}$ определена на отрезке $[-1;\ 1]$. Сделаем подстановку: $\sin t=x$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $t=\arcsin x$, $\sqrt{1-x^2}=\cos t$, откуда $dx=(\sin t)'\,dt=\cos t\,dt$. Итак,

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos t\cdot\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+$$
$$+C=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C,$$ где C — некоторое число.

б) Подынтегральная функция $y=\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ определена на отрезке $[-2;\ 2]$. Сделаем подстановку: $\sin t=\frac{x}{2}$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $t=\arcsin\frac{x}{2}$, $\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\cos t$, откуда $dx=(2\sin t)'\,dt=2\cos t\,dt$. Итак,

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=2\int 2\cos^2 t\,dt=$$
$$=2\int(1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$
$$=2t+2\sin t\cos t+C=2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+C=$$
$$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C,$$ где C — некоторое число.

Пример 3. Найдем $\int\operatorname{tg}4x\,dx$.

Решение. Подынтегральная функция $y=\operatorname{tg}4x=\frac{\sin 4x}{\cos 4x}$ определена для всех действительных x, кроме $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Сделаем подстановку: $\cos 4x=t$, $t\in(-1;\ 1)$, тогда $dt=(\cos 4x)'\,dx=-4\sin 4x\,dx$, откуда $\sin 4x\,dx=-\frac{dt}{4}$. Итак,

$$\int\operatorname{tg}4x\,dx=\int\frac{\sin 4x\,dx}{\cos 4x}=\int\frac{-dt}{4t}=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{4}\ln|t|+C=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|\cos 4x|+C,$$ где C — некоторое число.

26. Геометрический смысл определенного интеграла

Пример 1. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислим:

а) $\int\limits_2^5 3dx$; б) $\int\limits_{-6}^0 \frac{x}{3}dx$; в) $\int\limits_1^5 (x+1)dx$.

Решение. а) Построим график функции $y=3$ на отрезке $[2; 5]$ (рис. 37). Значения функции на отрезке положительны, поэтому искомый интеграл равен площади прямоугольника $ABCD$:

$$\int\limits_2^5 3dx = AB \cdot BC = (5-2)\cdot 3 = 9.$$

б) Построим график функции $y=\frac{x}{3}$ на отрезке $[-6; 0]$ (рис. 38). Значения функции на отрезке неположительны ($y \leqslant 0$), поэтому искомый интеграл равен площади треугольника ABO, взятой со знаком «минус»:

$$\int\limits_{-6}^0 \frac{x}{3}dx = -\frac{1}{2}\cdot OA \cdot AB = -\frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 2 = -6.$$

в) Построим график функции $y=x+1$ на отрезке $[1; 5]$ (рис. 39). Значения функции на отрезке положительны, поэтому искомый интеграл равен площади трапеции $ABCD$:

$$\int\limits_1^5 (x+1)dx = \frac{(AB+CD)\cdot AD}{2} = \frac{(2+6)\cdot 4}{2} = 16.$$

Пример 2. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислим $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

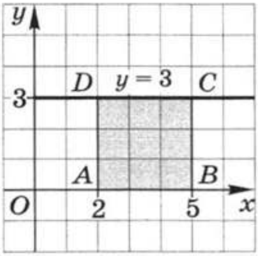

Рис. 37

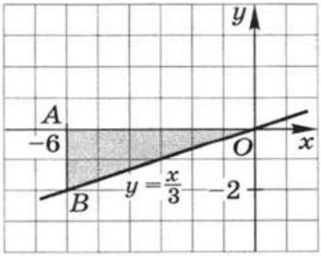

Рис. 38

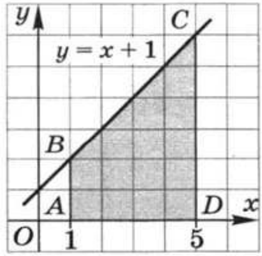

Рис. 39

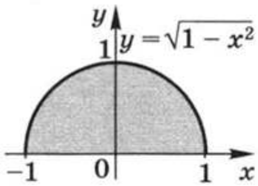

Рис. 40

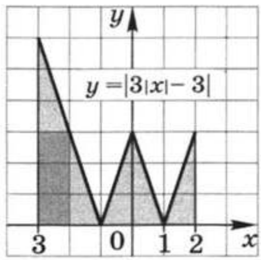

Рис. 41

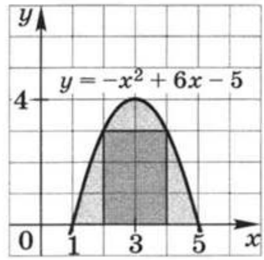

Рис. 42

Решение. Подынтегральная функция $y=\sqrt{1-x^2}$ определена на отрезке $[-1;\ 1]$ и принимает неотрицательные значения ($y \geqslant 0$). Точки графика этой функции совпадают с точками верхней половины окружности $x^2+y^2=1$ (рис. 40).

Значения функции на отрезке $[-1;\ 1]$ неотрицательны, поэтому искомый интеграл равен площади половины круга радиуса 1, т. е.

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 3. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислим $\int_{-3}^{2}|3|x|-3|\,dx$.

Решение. Построим график функции $y=|3|x|-3|$ на отрезке $[-3;\ 2]$ (рис. 41). Эта функция принимает неотрицательные значения, поэтому искомый интеграл равен площади фигуры, закрашенной на рисунке. Эта площадь равна трем единицам площади (целые квадраты закрашены темнее) и сумме площадей пяти прямоугольных треугольников с катетами 3 и 1, т. е.

$$\int_{-3}^{2}|3|x|-3|\,dx=3+5\cdot\frac{3\cdot 1}{2}=10{,}5.$$

Пример 4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислим приближенно интеграл $\int_{1}^{5}(-x^2+6x-5)\,dx$.

Решение. Построим график функции $y=-x^2+6x-5$ на отрезке $[1;\ 5]$. Это парабола с вершиной $(3;\ 4)$, ветви которой направлены вниз (рис. 42). Значения функции на отрезке $[1;\ 5]$ неотрицательны, поэтому искомый интеграл равен площади закрашенной фигуры.

Фигура содержит 6 целых единиц площади (целые квадраты закрашены темнее) и 8 нецелых единиц площади, каждую из которых считаем приближенно равной половине единицы площади, тогда

$$\int_1^5 (-x^2+6x-5)\,dx \approx 6+\frac{8}{2}=10.$$

27. Формула Ньютона—Лейбница

Пример 1. С помощью формулы Ньютона—Лейбница вычислим определенный интеграл $\int_{-1}^{3}(1+6x-3x^2)\,dx$.

Решение. $\int_{-1}^{3}(1+6x-3x^2)\,dx=\left(x+\frac{6x^2}{2}-\frac{3x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3}=$

$=(x+3x^2-x^3)\Big|_{-1}^{3}=(3+3^3-3^3)-(-1+3\cdot(-1)^2-(-1)^3)=0.$

Пример 2. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6x+11$ и $y=x+1$.

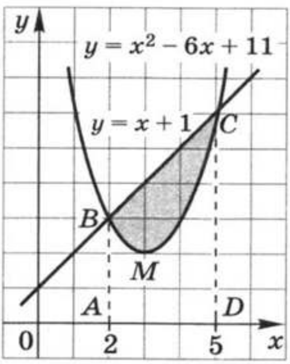

Рис. 43

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=x^2-6x+11$ и $y=x+1$, для этого решим уравнение $x^2-6x+11=x+1$. Оно имеет два корня: 2 и 5.

Построим графики функций $y=x^2-6x+11$ и $y=x+1$ (рис. 43).

Искомую площадь вычислим как разность площади S_1 трапеции $ABCD$ и площади S_2 криволинейной трапеции $ABMCD$:

$$S_1=\frac{(3+6)\cdot 3}{2}=13{,}5 \text{ (кв. ед.)},$$

$$S_2=\int_2^5(x^2-6x+11)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+11x\right)\Big|_2^5=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+11x\right)\Big|_2^5=$$

$$=\left(\frac{5^3}{3}-3\cdot5^2+11\cdot5\right)-\left(\frac{2^3}{3}-3\cdot2^2+11\cdot2\right)=$$

$$=\frac{125}{3}-75+55-\frac{8}{3}+12-22=9 \text{ (кв. ед.)}.$$

$S=S_1-S_2=13{,}5-9=4{,}5$ (кв. ед.).

Ответ. 4,5 кв. ед.

Пример 3. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$ и $x=2\pi$.

Решение. Построим график функции $y=\sin x$ и прямые $y=0$, $x=0$ и $x=2\pi$ (рис. 44). Так как синусоида симметрична относительно точки $(\pi;\ 0)$, то две фигуры, закрашенные на рисунке 44, имеют равные площади. Поэтому искомая площадь равна

$$S=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=-2(\cos\pi-\cos 0)=-2(-1-1)=$$
$$=2\cdot 2=4 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ. 4 кв. ед.

Пример 4. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$ и $y=4x$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=x^3$ и $y=4x$, для этого решим уравнение $x^3=4x$. Это уравнение имеет три корня: -2, 0, 2.

Построим графики функций $y=x^3$ и $y=4x$ (рис. 45) на отрезке $[-2;\ 2]$. Так как обе функции нечетные и их графики симметричны относительно начала координат, то две фигуры, закрашенные на рисунке 45, равны и имеют равные площади. Поэтому искомая площадь равна

$$S=2(S_{OAD}-S_{OBAD})=2\left(\frac{2\cdot 8}{2}-\int_0^2 x^3\,dx\right)=$$
$$=16-2\int_0^2 x^3\,dx=16-2\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2=$$
$$=16-2\cdot\left(\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)=8 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ. 8 кв. ед.

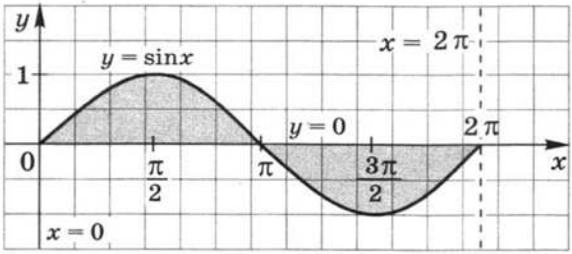

Рис. 44

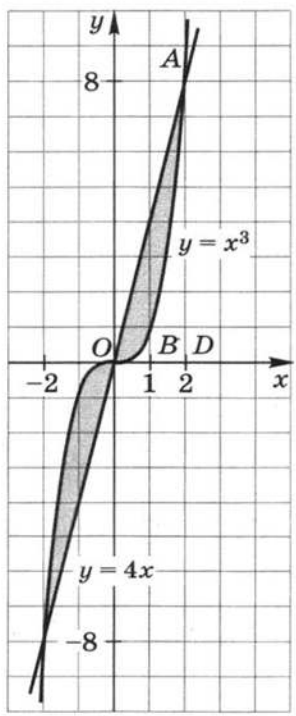

Рис. 45

28. Свойства определенного интеграла

Пример 1. Вычислим:

а) $\int\limits_1^{\sqrt{5}} x^3\,dx+\int\limits_{\sqrt{5}}^3 x^3\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \sin x\,dx+\int\limits_1^{\pi} \sin x\,dx$.

Решение. Воспользуемся свойством определенного интеграла

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

а) $\int\limits_1^{\sqrt{5}} x^3\,dx+\int\limits_{\sqrt{5}}^3 x^3\,dx=\int\limits_1^3 x^3\,dx=\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^3=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=20;$

б) $\int\limits_0^1 \sin x\,dx+\int\limits_1^{\pi} \sin x\,dx=\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=$
$=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2.$

Пример 2. Вычислим:

а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 9x\cos 8x\,dx+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 9x\sin 8x\,dx$;

б) $\int\limits_2^4 (x^2+\ln x)\,dx-\int\limits_2^4 (x+\ln x)\,dx$.

Решение. Воспользуемся свойством определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b g(x)\,dx=\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$

а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 9x\cos 8x\,dx+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 9x\sin 8x\,dx=$

$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 9x\cos 8x+\sin 9x\sin 8x)\,dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=$

$=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-(-1)=2;$

б) $\int\limits_2^4 (x^2+\ln x)\,dx-\int\limits_2^4 (x+\ln x)\,dx=\int\limits_2^4 (x^2-x)\,dx=$

$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{4^2}{2}\right)-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)=12\frac{2}{3}.$

Пример 3. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+4x+3$ и $y=x-1$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=-x^2+4x+3$ и $y=x-1$. Для этого решим уравнение $-x^2+4x+3=x-1$. Это уравнение имеет два корня: -1 и 4.

Построим график функции $y=-x^2+4x+3$ и прямую $y=x-1$ (рис. 46). Часть закрашенной фигуры расположена ниже оси Ox, поэтому перенесем оба графика вверх на 3 единицы. Теперь линии задаются другими функциями: $y=-x^2+4x+6$ и $y=x+2$ (рис. 47), но фигуры, ограниченные линиями на рисунках 46 и 47, равны и площади их равны.

Искомую площадь вычислим как разность площади S_1 криволинейной трапеции $AFBCD$ и площади S_2 трапеции $AFCD$:

$$S_1=\int\limits_{-1}^{4}(-x^2+4x+6)\,dx \text{ (кв. ед.)},\ S_2=\int\limits_{-1}^{4}(x+2)\,dx \text{ (кв. ед.)}.$$

$$S=S_1-S_2=\int\limits_{-1}^{4}(-x^2+4x+6)\,dx-\int\limits_{-1}^{4}(x+2)\,dx=$$

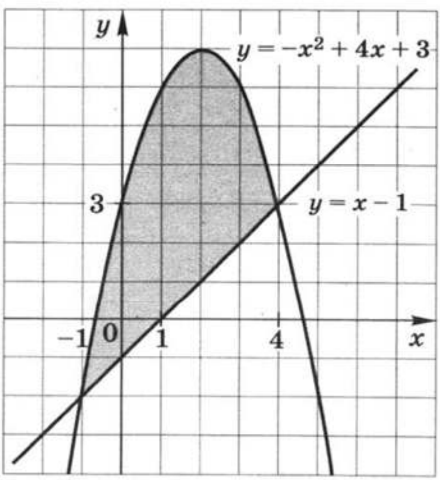

Рис. 46

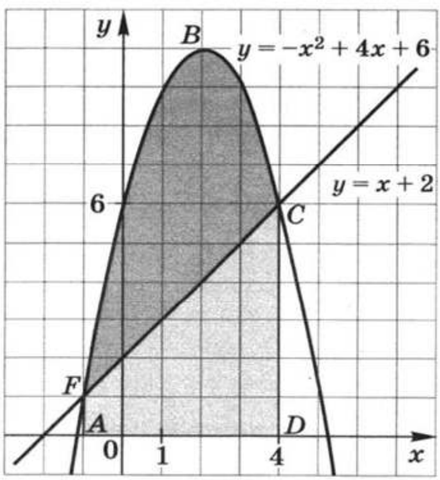

Рис. 47

$$=\int_{-1}^{4}((-x^2+4x+6)-(x+2))\,dx=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-1}^{4}=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{3\cdot4^2}{2}+4\cdot4\right)-$$

$$-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{3\cdot(-1)^2}{2}+4\cdot(-1)\right)=$$

$$=-\frac{64}{3}+24+16-\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}+4=20\frac{5}{6}\ \text{(кв. ед.)}.$$

Ответ. $20\frac{5}{6}$ кв. ед.

Замечание. Разность функций $y=-x^2+4x+6$ и $y=x+2$ равна разности исходных функций, поэтому искомая площадь равна интегралу от разности данных функций:

$$S=\int_{-1}^{4}((-x^2+4x+3)-(x-1))\,dx.$$

Пример 4. Вычислим площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, где

$$f(x)=x^3-3x^2 \text{ и } g(x)=x^2-4x.$$

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Для этого решим уравнение $x^3-3x^2=x^2-4x$. Оно имеет два корня: 0 и 2, это и будут границы интегрирования. Остается определить, точки графика какой из двух данных функций расположены на интервале (0; 2) выше. Для этого вычислим значения функций в точке $x=1$ данного интервала:

$$f(1)=1^3-3\cdot1^2=-2,\ g(1)=1^2-4\cdot1=-3.$$

Так как $f(1)>g(1)$, то точки графика функции $y=f(x)$ расположены выше точек графика функции $y=g(x)$. Поэтому искомая площадь S равна:

$$S=\int_0^2(f(x)-g(x))\,dx=\int_0^2((x^3-3x^2)-(x^2-4x))\,dx=$$

$$=\int_0^2(x^3-4x^2+4x)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_0^2=$$

$$=\left(\frac{2^4}{4}-\frac{4\cdot2^3}{3}+2\cdot2^2\right)-0=1\frac{1}{3}\ \text{(кв. ед.)}.$$

Ответ. $1\frac{1}{3}$ кв. ед.

29. Равносильные преобразования уравнений

Перечислим основные преобразования уравнений с одним неизвестным x, приводящие к уравнению, равносильному исходному.

1. Перенос члена уравнения (с противоположным знаком) из одной части уравнения в другую.

2. Умножение (деление) обеих частей уравнения на неравное нулю число.

3. Применение тождеств, т. е. равенств, справедливых для каждого $x \in \boldsymbol{R}$.

4. Возведение уравнения в нечетную степень.

5. Извлечение из обеих частей уравнения корня нечетной степени.

6. Логарифмирование показательного уравнения, т. е. замена уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$ и $a \neq 1$) уравнением $f(x) = g(x)$.

Отметим, что обычно, применяя преобразования 1—3, не пишут, что полученное уравнение равносильно исходному, а пишут: «Перепишем исходное уравнение в виде...»

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{2x^2 - 24x - x^3} = 2 - x. \qquad (1)$$

Решение. Возведя уравнение (1) в 3-ю степень, получим уравнение

$$2x^2 - 24x - x^3 = (2 - x)^3, \qquad (2)$$

равносильное уравнению (1). Применяя формулу куба разности, перенося все члены уравнения в правую часть и приводя подобные члены многочлена, перепишем уравнение (2) в виде

$$4x^2 + 12x + 8 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня: -1 и -2, а значит, и равносильное ему уравнение (1) имеет те же корни.

Ответ. -1; -2.

Пример 2. Решим уравнение

$$(2x - 3)^7 = (x + 3)^7. \qquad (4)$$

Решение. Извлекая корень 7-й степени из обеих частей уравнения (4), получим уравнение

$$2x - 3 = x + 3, \qquad (5)$$

равносильное уравнению (4). Уравнение (5), а значит, и равносильное ему уравнение (4) имеют единственный корень 6.

Ответ. 6.

Пример 3. Решим уравнение

$$9^{2x^2-3x}=9^{x+6}. \tag{6}$$

Решение. Логарифмируя показательное уравнение (6), получим уравнение

$$2x^2-3x=x+6, \tag{7}$$

равносильное уравнению (6). Уравнение (7), а значит, и равносильное ему уравнение (6) имеют по два корня: -1 и 3.

Ответ. -1 и 3.

Пример 4. Решим уравнение

$$2^{x+5}=3^x. \tag{8}$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2^{x+5}=2^{x\log_2 3}. \tag{9}$$

Логарифмируя показательное уравнение (9), получим уравнение

$$x+5=x\log_2 3, \tag{10}$$

равносильное уравнению (8). Уравнение (10), а значит, и равносильное ему уравнение (8) имеют единственный корень $\dfrac{5}{\log_2 3-1}$.

Ответ. $\dfrac{5}{\log_2 3-1}$.

30. Равносильные преобразования неравенств

Перечислим основные преобразования неравенств с одним неизвестным x, приводящие к неравенству того же знака, равносильному исходному.

1. Перенос члена неравенства (с противоположным знаком) из одной части неравенства в другую.
2. Умножение (деление) обеих частей неравенства на положительное число.
3. Применение тождеств.
4. Возведение неравенства в нечетную степень.
5. Извлечение из обеих частей неравенства корня нечетной степени.
6. Логарифмирование показательного неравенства по основанию a $(a>1)$, т. е. замена неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ неравенством $f(x)>g(x)$.

Отметим также основные преобразования неравенств, приводящие к неравенству противоположного знака, равносильному исходному.

7. Умножение (деление) обеих частей неравенства на отрицательное число.

8. Логарифмирование показательного неравенства по основанию a $(0<a<1)$, т. е. замена неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ неравенством $f(x)<g(x)$.

Отметим, что обычно, применяя преобразования 1—3, даже не пишут, что полученное неравенство равносильно исходному, а пишут: «Перепишем исходное неравенство в виде...»

Пример 1. Решим неравенство

$$\sqrt[3]{x^3-2x^2+4x-5}<x-2. \qquad (1)$$

Решение. Возведя неравенство (1) в 3-ю степень, получим неравенство

$$x^3-2x^2+4x-5<(x-2)^3, \qquad (2)$$

равносильное неравенству (1).

Применяя формулу куба разности, перенося все члены неравенства в левую часть и приводя подобные члены многочлена, перепишем неравенство (2) в виде

$$4x^2-8x+3<0. \qquad (3)$$

Все решения неравенства (3), а значит, и равносильного ему неравенства (1) составляют интервал $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$(x+1)^{15}<(x^2-2x-3)^{15}. \qquad (4)$$

Решение. Извлекая корень 15-й степени из обеих частей неравенства (4), получим неравенство

$$x+1<x^2-2x-3, \qquad (5)$$

равносильное неравенству (4). Все решения неравенства (5), а значит, и равносильного ему неравенства (4) составляют два интервала: $(-\infty;\ -1)$ и $(4;\ +\infty)$.

Ответ. $(-\infty;\ -1)\cup(4;\ +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x}<\left(\frac{2}{7}\right)^{1-3x}. \qquad (6)$$

Решение. Логарифмируя показательное неравенство (6) по основанию $\frac{2}{7}$ $\left(0<\frac{2}{7}<1\right)$, получим неравенство

$$3-x>1-3x, \qquad (7)$$

равносильное неравенству (6). Все решения неравенства (7), а значит, и равносильного ему неравенства (6) составляют интервал $(-1;\ +\infty)$.

Ответ. $(-1;\ +\infty)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$11^{\cos 2x} > 11^{1-2\cos^2 x}. \qquad (8)$$

Решение. Логарифмируя показательное неравенство (8) по основанию 11 $(11>1)$, получим неравенство

$$\cos 2x > 1-2\cos^2 x, \qquad (9)$$

равносильное неравенству (8).

Применяя к правой части неравенства (9) тождество $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, перепишем неравенство (9) в виде

$$\cos 2x > -\cos 2x. \qquad (10)$$

Перенося все члены неравенства (10) в левую часть неравенства и деля обе части неравенства на число 2, перепишем неравенство (10) в виде

$$\cos 2x > 0. \qquad (11)$$

Все решения неравенства (11), а значит, и равносильного ему неравенства (8) составляют серию промежутков $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

31. Уравнения-следствия

При переходе к уравнению-следствию возможно появление корней, не являющихся корнями исходного уравнения (посторонних для исходного уравнения). При таком способе решения уравнения обязательной частью решения является проверка: являются ли найденные числа корнями исходного уравнения.

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a>0$ и $a \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Следствием уравнения $f(x)=g(x)$ является уравнение $(f(x))^{2k}=(g(x))^{2k}$.

2. Следствием уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ является уравнение $f(x)=g(x)$.

3. Следствием уравнения $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ является уравнение $f(x)=g(x)$.

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt{x-1}=x-3. \qquad (1)$$

Решение. Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим уравнение

$$x-1=(x-3)^2, \qquad (2)$$

которое по утверждению 1 является следствием уравнения (1). Применяя формулу квадрата суммы, перенося все члены уравнения (2) в правую часть и приводя подобные члены многочлена, перепишем уравнение (2) в виде

$$x^2-7x+10=0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня: 5 и 2. Проверим, являются ли числа 5 и 2 корнями уравнения (1). Так как $\sqrt{5-1}=5-3$, а $\sqrt{2-1}\neq 2-3$, то число 5 является корнем уравнения (1), а число 2 нет.

Ответ. 5.

Пример 2. Решим уравнение

$$\sqrt[10]{x^2-4x-5}=\sqrt[10]{2x^2-7x-9}. \qquad (4)$$

Решение. Возведя уравнение (4) в 10-ю степень, получим уравнение

$$x^2-4x-5=2x^2-7x-9, \qquad (5)$$

которое по утверждению 1 является следствием уравнения (4). Уравнение (5) имеет два корня: -1 и 4. Проверка показывает, что число -1 является корнем уравнения (4), а число 4 нет.

Ответ. -1.

Отметим, что возведение в квадрат обеих частей уравнения является одним из способов избавления уравнения от знака модуля.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sin x=|\sin x|\cos x. \qquad (6)$$

Решение. Возведя уравнение (6) в квадрат, получим уравнение

$$\sin^2 x=\sin^2 x\cos^2 x, \qquad (7)$$

которое по утверждению 1 является следствием уравнения (6). Перенеся все члены уравнения в левую часть, вынеся за скобки общий множитель и применив основное тригонометрическое тождество, перепишем уравнение (7) в виде

$$\sin^4 x=0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) имеет единственную серию решений $x_k=\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. Проверка показывает, что все числа x_k являются решениями уравнения (6).

Ответ. πk, $k\in \mathbf{Z}$.

Пример 4. Решим уравнение

$$\lg(x^4+2x^2-4)=\lg(x^4+6x-8). \qquad (9)$$

Решение. Потенцируя логарифмическое уравнение (9), получим уравнение

$$x^4+2x^2-4=x^4+6x-8, \qquad (10)$$

которое по утверждению 2 является следствием уравнения (9). Перенося все члены уравнения (10) в левую часть и приводя подобные члены многочлена, перепишем уравнение (10) в виде

$$2x^2-6x+4=0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) имеет два корня: 1 и 2. Проверим, являются ли числа 1 и 2 корнями уравнения (9). Так как $1^4+2\cdot1^2-4=-1$, а логарифм отрицательного числа не существует, то число 1 не является корнем уравнения (9). Так как $\lg(2^4+2\cdot2^2-4)=\lg 20$ и $\lg(2^4+6\cdot2-8)=\lg 20$, то число 2 является корнем уравнения (9).

Ответ. 2.

Пример 5. Решим уравнение

$$x^2-6x+\sqrt[6]{x-3}=\sqrt[6]{x-3}-8. \qquad (12)$$

Решение. Перенося все члены уравнения (12) в левую часть и приводя подобные члены (т. е. заменяя разность $\sqrt[6]{x-3}-\sqrt[6]{x-3}$ нулем), получим уравнение

$$x^2-6x+8=0, \qquad (13)$$

которое по утверждению 3 является следствием уравнения (12). Уравнение (13) имеет два корня: 2 и 4. Так как $2-3=-1<0$, а под корнем четной степени не может быть отрицательного числа, то число 2 не является корнем уравнения (12). Так как $4^2-6\cdot4+\sqrt[6]{4-3}=-7$ и $\sqrt[6]{4-3}-8=$ $=-7$, то число 4 является корнем уравнения (12).

Ответ. 4.

32. Уравнения-следствия (продолжение)

Справедливо следующее утверждение:

4. Следствием уравнения $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ является уравнение $f(x)=0$.

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a>0$ и $a\neq1$. Рассмотрим формулы:

1) $\sqrt[2k]{f(x)}\sqrt[2k]{g(x)}=\sqrt[2k]{f(x)g(x)}$;

2) $\dfrac{\sqrt[2k]{f(x)}}{\sqrt[2k]{g(x)}}=\sqrt[2k]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$; 3) $a^{\log_a f(x)}=f(x)$;

4) $2k\log_a f(x)=\log_a (f(x))^{2k}$;

5) $\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a (f(x)g(x))$;

6) $\log_a f(x)-\log_a g(x)=\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$;

7) $\dfrac{1}{\log_{f(x)} a}=\log_a f(x)$; 8) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\sin 2x$;

9) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos 2x$; 10) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{tg} 2x$.

Справедливо следующее утверждение:

5. Если при решении уравнения применить любую из этих формул так, что левая часть формулы будет заменена правой, то получится уравнение-следствие исходного уравнения.

Замечание 1. Если применить любую из этих формул так, что правая часть формулы будет заменена левой, то можно потерять корни исходного уравнения. Поэтому такие преобразования в процессе решения уравнения недопустимы.

Замечание 2. Список формул 1—10 можно расширить.

Пример 1. Решим уравнение

$$\frac{x^2+2x}{x+3}=\frac{x+6}{x+3}. \tag{1}$$

Решение. Перенося все члены уравнения в левую часть и складывая дроби, перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{x^2+x-6}{x+3}=0. \tag{2}$$

Освобождаясь в уравнении (2) от знаменателя, получим уравнение

$$x^2+x-6=0, \tag{3}$$

которое по утверждению 4 является следствием уравнения (2). Уравнение (3) имеет два корня: 2 и -3. Проверка показывает, что число 2 является корнем уравнения (1), а число -3 нет.

Ответ. 2.

Пример 2. Решим уравнение

$$2^{\log_2(x-1)}=x^2+2x-7. \tag{4}$$

Решение. Применяя формулу 3, получим уравнение

$$x-1=x^2+2x-7, \tag{5}$$

которое по утверждению 5 является следствием уравнения (4). Уравнение (5) имеет два корня: 2 и -3. Проверка показывает, что число 2 является корнем уравнения (4), а число -3 нет.

Ответ. 2.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos^2 x. \tag{6}$$

Решение. Применяя формулу (9), получим уравнение

$$\cos 2x=\cos^2 x, \tag{7}$$

которое по утверждению 5 является следствием уравнения (6). Уравнение (7) имеет единственную серию решений $x_n=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Проверка показывает, что любое x_n является решением уравнения (6). Следовательно, уравнение (6) имеет единственную серию решений x_n.

Ответ. πn, $n\in\mathbf{Z}$.

Отметим, что при решении уравнений часто приходится применять несколько преобразований, приводящих к уравнению-следствию.

Пример 4. Решим уравнение

$$\log_3(2x-3)+\log_3(x-12)=2\log_3(x-6). \tag{8}$$

Решение. Применяя формулы 4 и 5, получим уравнение

$$\log_3((2x-3)(x-12))=\log_3(x-6)^2, \tag{9}$$

которое по утверждению 5 является следствием уравнения (8).

Потенцируя логарифмическое уравнение (9), получим уравнение

$$(2x-3)(x-12)=(x-6)^2, \tag{10}$$

которое по утверждению 2 является следствием уравнения (9), а значит, и уравнения (8). Уравнение (10) имеет два корня: 0 и 15.

Проверка показывает, что число 15 является корнем уравнения (8), а число 0 нет.

Ответ. 15.

Пример 5. Решим уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}=\sqrt{6x+13}. \tag{11}$$

Решение. По утверждению 1 следствием уравнения (11) является уравнение

$$2x+5+2\sqrt{2x+5}\sqrt{x+6}+x+6=6x+13,$$

которое перепишем в виде

$$2\sqrt{2x+5}\sqrt{x+6}=3x+2. \qquad (12)$$

По утверждению 1 следствием уравнения (12), а значит и уравнения (11), является уравнение

$$4(2x+5)(x+6)=(3x+2)^2,$$

имеющее два корня: $x_1=-2$ и $x_2=58$. Проверка показывает, что число 58 является корнем уравнения (11), а число -2 нет.

Ответ. 58.

Переход к уравнению-следствию может применяться и при решении уравнений с параметрами.

Пример 6*. Для каждого значения параметра a решим уравнение

$$\frac{a-3-ax}{ax+1}=3. \qquad (13)$$

Решение. Перепишем уравнение (13) в виде

$$\frac{4ax-a+6}{ax+1}=0. \qquad (14)$$

Освобождаясь в уравнении (14) от знаменателя, получим уравнение

$$4ax-a+6=0, \qquad (15)$$

которое по утверждению 4 является следствием уравнения (14) при каждом значении параметра a.

При $a=0$ уравнение (15) не имеет корней. При каждом $a\neq 0$ уравнение (15) имеет единственный корень $x_0=\frac{a-6}{4a}$. Проверим, является ли число x_0 корнем уравнения (13) при каждом $a\neq 0$. Для этого достаточно проверить, обращается ли в нуль при каком-нибудь значении a знаменатель дроби в уравнении (13). Так как при $a\neq 0$ имеем $ax_0+1=\frac{a-2}{4}$, то при $a=2$ знаменатель ax_0+1 обращается в нуль, а при каждом $a\neq 2$ знаменатель ax_0+1 не обращается в нуль, т. е. при $a=2$ уравнение (13) не имеет корней, а при каждом $a\neq 2$ и $a\neq 0$ имеет единственный корень.

Таким образом, при каждом a, таком, что $a\neq 0$ и $a\neq 2$, число x_0 является единственным корнем уравнения (13), а при $a=0$ и при $a=2$ уравнение (13) не имеет корней.

Ответ. При $a=0$ и при $a=2$ нет корней; при каждом a, таком, что $a \neq 0$ и $a \neq 2$, уравнение имеет единственный корень $\frac{a-6}{4a}$.

33. Решение уравнений с помощью систем

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a>0$, $a \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение $\sqrt[2k]{f(x)}=g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x)=(g(x))^{2k} \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Уравнение $\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)}$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

В этой системе одно (любое) из неравенств можно опустить.

3. Уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0. \end{cases}$$

В этой системе одно (любое) из неравенств можно опустить.

4. Уравнение $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ x \in D(\varphi), \end{cases}$$

где $D(\varphi)$ — область существования функции $\varphi(x)$.

Пример 1. Решим уравнение
$$\sqrt{10-14\sin x}=2\cos x. \qquad (1)$$

Решение. По утверждению 1 уравнение (1) равносильно системе
$$\begin{cases} 10-14\sin x=4\cos^2 x \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Так как $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, то систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases}(\sin x-3)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0\\ \cos x\geqslant 0.\end{cases}\qquad(3)$$

Так как $\sin x-3<0$ для любого $x\in\boldsymbol{R}$, то система (3) равносильна системе

$$\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x\geqslant 0.\end{cases}\qquad(4)$$

Система (4) имеет единственную серию решений $x_n=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Следовательно, и равносильное ей уравнение (1) имеет те же решения.

Ответ. $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\sqrt[4]{2x^2-1}=\sqrt[4]{6x-3}.\qquad(5)$$

Решение. По утверждению 2 уравнение (5) равносильно системе

$$\begin{cases}2x^2-1=6x-3\\ 6x-3\geqslant 0.\end{cases}\qquad(6)$$

Уравнение системы (6) имеет два корня: $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Так как $6x_1-3=3(2+\sqrt{5})>0$, а $6x_2-3=$ $=3(2-\sqrt{5})<0$, то число x_1 является решением системы (6), а число x_2 нет. Следовательно, и равносильное системе (6) уравнение (5) имеет то же решение.

Ответ. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$\lg\cos 2x=\lg\sin x.\qquad(7)$$

Решение. По утверждению 3 уравнение (7) равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x=\sin x\\ \sin x>0.\end{cases}\qquad(8)$$

Так как $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ для любого $x\in\boldsymbol{R}$, то систему (8) можно переписать в виде

$$\begin{cases}(1+\sin x)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0\\ \sin x>0.\end{cases}\qquad(9)$$

Учитывая неравенство системы (9), получим, что система (9) равносильна уравнению

$$\sin x = \frac{1}{2}, \tag{10}$$

имеющему единственную серию решений $x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, и уравнение (7), равносильное уравнению (10), имеет те же решения.

Ответ. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4. Решим уравнение

$$4x^2 - 8x + \lg \sin x = 1 + \lg \sin x. \tag{11}$$

Решение. По утверждению 4 уравнение (11) равносильно системе

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x - 1 = 0 \\ \sin x > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Уравнение системы (12) имеет два корня: $x_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{2-\sqrt{5}}{2}$. Так как $0 < x_1 < \pi$, то $\sin x_1 > 0$; так как $-\pi < x_2 < 0$, то $\sin x_2 < 0$. Поэтому число x_1 является решением системы (12), а число x_2 нет. Следовательно, система (12), а значит, и равносильное ей уравнение (11) имеют единственное решение x_1.

Ответ. $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

34. Решение уравнений с помощью систем (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

5. Множество решений уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ есть объединение множеств решений двух систем $\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ x \in D(f_2) \end{cases}$ и $\begin{cases} f_2(x) = 0 \\ x \in D(f_1) \end{cases}$, где $D(f_1)$ — область существования функции $f_1(x)$, а $D(f_2)$ — область существования функции $f_2(x)$.

6. Уравнение $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

Пример 1. Решим уравнение

$$\lg x \cdot \sqrt{\sin x} = 0. \tag{1}$$

По утверждению 5 множество решений уравнения (1) есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} \lg x = 0 \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sin x = 0 \\ x > 0. \end{cases}$$

Первая система имеет единственное решение $x_0 = 1$. Уравнение второй системы имеет единственную серию решений $x_n = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, из которых неравенству второй системы удовлетворяют лишь числа $x_k = \pi k$, $k \in \boldsymbol{N}$. Следовательно, вторая система имеет решения x_k. Объединив все решения двух систем, получим, что уравнение (1) имеет решения $x_0 = 1$ и $x_k = \pi k$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Ответ. 1; πk, $k \in \boldsymbol{N}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{\cos 2\pi x}{x-5} = \frac{1}{x-5}. \tag{2}$$

Решение. Перенося все члены уравнения в левую часть и вычитая дроби, перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{\cos 2\pi x - 1}{x-5} = 0. \tag{3}$$

По утверждению 6 уравнение (3) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1 \\ x - 5 \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Уравнение системы (4) имеет единственную серию решений $x_k = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из этих чисел второму условию системы удовлетворяют все числа, кроме числа $x_5 = 5$. Поэтому система (4) имеет серию решений $x_k = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 5$. Следовательно, и равносильное ей уравнение (2) имеет те же решения.

Ответ. k, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 5$.

В утверждении 6 под записью $g(x) \neq 0$ понимают множество всех чисел x, для каждого из которых определено выражение $g(x)$ и число $g(x)$ не равно нулю.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{x^2}{\sqrt{2+x-x^2}} = \frac{3-2x}{\sqrt{2+x-x^2}}. \tag{5}$$

Решение. Перенося все члены уравнения в левую часть, перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{2+x-x^2}} = 0. \tag{6}$$

По утверждению 6 уравнение (6) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ \sqrt{2+x-x^2}\neq 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Уравнение системы (7) имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=-3$. Так как $2+x_1-x_1^2=2$, то $\sqrt{2+x_1-x_1^2}\neq 0$. Поэтому число x_1 является решением системы (6). Так как $2+x_2-x_2^2=-10<0$, то выражение $\sqrt{2+x_2-x_2^2}$ не определено. Поэтому число x_2 не является решением системы (6). Следовательно, система (6), а значит, и равносильное ей уравнение (5) имеют единственное решение x_1.

Ответ. 1.

При решении уравнений часто применяют несколько преобразований, приводящих к равносильной системе.

Пример 4. Решим уравнение

$$\log_3 \frac{-x^2+3x}{x-1}=\log_3 \frac{x^3+x}{x-1}. \qquad (8)$$

Решение. По утверждению 3 уравнение (8) равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{-x^2+3x}{x-1}=\dfrac{x^3+x}{x-1} \\ \dfrac{x^3+x}{x-1}>0. \end{cases} \qquad (9)$$

Применяя утверждение 6, получим, что система (9) равносильна системе

$$\begin{cases} -x^2+3x-x^3-x=0 \\ x-1\neq 0 \\ \dfrac{x^3+x}{x-1}>0. \end{cases} \qquad (10)$$

Уравнение системы (10) имеет три корня: $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=-2$. Из этих чисел неравенствам системы (10) удовлетворяет лишь число x_3. Следовательно, система (10), а значит, и равносильное ей уравнение (8) имеют единственный корень x_3.

Ответ. -2.

При решении уравнений с параметром также можно применять преобразования, приводящие к равносильным системам.

Пример 5*. Для каждого значения параметра a решим уравнение

$$\sqrt{x^2-6x-2a}=x-2. \qquad (11)$$

Решение. По утверждению 1 для каждого значения параметра a уравнение (11) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-6x-2a=(x-2)^2 \\ x-2\geqslant 0. \end{cases} \tag{12}$$

Система (12) равносильна системе

$$\begin{cases} x=-2-a \\ x\geqslant 2. \end{cases} \tag{13}$$

Так как $-2-a\geqslant 2$ только при $a\leqslant -4$, то при каждом $a\leqslant -4$ система (13) имеет единственное решение $x_0=-2-a$. А при каждом $a>-4$ система (13) не имеет решений.

Таким образом, при каждом $a\leqslant -4$ уравнение (11), равносильное системе (13), имеет единственное решение $x_0=-2-a$, а при каждом $a>-4$ не имеет решений.

Ответ. $-2-a$ при $a\leqslant -4$, нет решений при $a>-4$.

35*. Уравнения вида $f(\alpha(x))=f(\beta(x))$

Справедливо следующее утверждение:

1. Пусть область существования функции $f(x)$ есть промежуток J и пусть эта функция строго монотонна (т. е. возрастает или убывает) на этом промежутке. Тогда уравнение $f(\alpha(x))=f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x)=\beta(x) \\ \alpha(x)\in J \\ \beta(x)\in J. \end{cases}$$

В этой системе одно (любое) из условий $\alpha(x)\in J$ или $\beta(x)\in J$ можно опустить.

Частными случаями этого утверждения являются утверждения 2 и 3 из п. 33.

Пример 1. Решим уравнение

$$\arcsin(x^2-80{,}5)=\arcsin(x-8{,}5). \tag{1}$$

Решение. Так как функция $f(u)=\arcsin u$ имеет область определения — промежуток $J=[-1;\ 1]$ и возрастает на нем, то по утверждению 1 уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-80{,}5=x-8{,}5 \\ -1\leqslant x-8{,}5\leqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Уравнение системы (2) имеет два корня: $x_1=9$ и $x_2=-8$, из которых только число x_1 удовлетворяет двойному неравенству системы (2), поэтому система (2), а значит, и равносильное ей уравнение (1) имеют единственное решение x_1.

Ответ. 9.

Пример 2. Решим уравнение

$$\log_{0,2}(x^2-2)+\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2}=\log_{0,2}(2x+1)+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}. \qquad (3)$$

Решение. Область существования функции $f(u)=$ $=\log_{0,2}u+\left(\frac{1}{3}\right)^u$ есть промежуток $J=(0; +\infty)$. Так как функция $f(u)$ убывает на этом промежутке (как сумма двух убывающих на этом промежутке функций), то по утверждению 1 уравнение (3) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-2=2x+1 \\ 2x+1>0. \end{cases} \qquad (4)$$

Уравнение системы (4) имеет два корня: $x_1=-1$ и $x_2=$ $=3$, из которых только число x_2 удовлетворяет неравенству системы (4), поэтому система (4), а значит, и равносильное ей уравнение (4) имеют единственное решение x_2.

Ответ. 3.

Из утверждения 1 вытекает следующее утверждение:

2. Пусть область существования функции f есть $\boldsymbol{R}$ и пусть эта функция строго монотонна на $\boldsymbol{R}$, тогда равносильны уравнения

$$f(\alpha(x))=f(\beta(x)) \text{ и } \alpha(x)=\beta(x).$$

Частным случаем этого утверждения является утверждение 6 из п. 29.

Пример 3. Решим уравнение

$$\operatorname{arcctg}(x^2-5)=\operatorname{arcctg}(5x+9). \qquad (5)$$

Решение. Так как функция $f(u)=\operatorname{arcctg} u$ имеет область существования — промежуток $\boldsymbol{R}$ и убывает на нем, то по утверждению 2 уравнение (5) равносильно уравнению

$$x^2-5=5x+9. \qquad (6)$$

Уравнение (6) имеет два корня: -2 и 7. Следовательно, и равносильное ему уравнение (5) имеет те же корни.

Ответ. -2; 7.

Пример 4. Решим уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}-(\sin x)^{2007}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin^2 x}-(\sin x)^{4014}. \qquad (7)$$

Решение. Так как функция $f(u)=\left(\frac{1}{3}\right)^u+(-u)^{2007}$ имеет область существования — промежуток $\boldsymbol{R}$ и убывает на нем (как сумма двух убывающих на этом промежутке функций), то по утверждению 2 уравнение (7) равносильно уравнению

$$\sin x = \sin^2 x. \qquad (8)$$

Уравнение (8) имеет две серии решений: $x_k = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, и уравнение (7), равносильное уравнению (8), имеет те же две серии решений.

Ответ. πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

36. Решение неравенств с помощью систем

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a > 0$, $a \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^{2k} \\ f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. Множество решений неравенства $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x)$ есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > (g(x))^{2k} \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

3. Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < \sqrt[2k]{g(x)}$ равносильно двойному неравенству $0 \leqslant f(x) < g(x)$.

4. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно двойному неравенству:

$$f(x) > g(x) > 0 \text{ при } a > 1,$$
$$0 < f(x) < g(x) \text{ при } 0 < a < 1.$$

5. Неравенство $f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ x \in D(\varphi), \end{cases}$$

где $D(\varphi)$ — область существования функции $\varphi(x)$.

Пример 1. Решим неравенство

$$\sqrt{3x+1} < 2x - 1. \qquad (1)$$

Решение. По утверждению 1 неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+1 < (2x-1)^2 \\ 3x+1 \geqslant 0 \\ 2x-1 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) имеет множество решений — промежуток $\left(\frac{7}{4};\ +\infty\right)$. Следовательно, неравенство (1), равносильное системе (2), имеет то же множество решений.

Ответ. $\left(\frac{7}{4};\ +\infty\right)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$2\sqrt{x+7} > x+1. \qquad (3)$$

Решение. По утверждению 2 множество решений неравенства (3) есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} 4(x+7) > (x+1)^2 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+7 \geqslant 0 \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

Все решения первой системы составляют промежуток $[-1;\ 1+2\sqrt{7})$. Все решения второй системы составляют промежуток $[-7;\ -1)$.

Объединяя эти промежутки, получаем, что все решения неравенства (3) составляют промежуток $[-7;\ 1+2\sqrt{7})$.

Ответ. $[-7;\ 1+2\sqrt{7})$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\sqrt[4]{x^2-5} < \sqrt[4]{5x+9}. \qquad (4)$$

Решение. По утверждению 3 неравенство (4) равносильно двойному неравенству

$$0 \leqslant x^2-5 < 5x+9,$$

которое можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x^2-5x-14 < 0 \\ x^2-5 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Все решения системы (5), а значит, и равносильного ей неравенства (4) составляют промежуток $[\sqrt{5};\ 7)$.

Ответ. $[\sqrt{5};\ 7)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$\log_{0,1}(x^3+2x^2-2x) > \log_{0,1}(x^3+4). \qquad (6)$$

Решение. Так как $0 < 0,1 < 1$, то по утверждению 4 неравенство (6) равносильно двойному неравенству

$$0 < x^3+2x^2-2x < x^3+4,$$

которое можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x^2-x-2 < 0 \\ x(x^2+2x-2) > 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Все решения системы (7), а значит, и равносильного ей неравенства (6) составляют два промежутка $(-1;\ 0)$ и $(-1+\sqrt{3};\ 2)$.

Ответ. $(-1;\ 0)\cup(-1+\sqrt{3};\ 2)$.

Пример 5. Решим неравенство

$$x^2-2x+\sqrt{\sin x}<3x-4+\sqrt{\sin x}. \qquad (8)$$

Решение. По утверждению 5 неравенство (8) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-2x<3x-4 \\ \sin x\geqslant 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Все решения первого неравенства системы (9) составляют промежуток $(1;\ 4)$. Из них второму неравенству системы (9) удовлетворяют лишь x из промежутка $(1;\ \pi]$. Следовательно, все решения системы (9), а значит, и равносильного ей неравенства (8) составляют тот же промежуток.

Ответ. $(1;\ \pi]$.

37. Решение неравенств с помощью систем (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

6. Множество решений каждого из неравенств

$$f(x)\cdot g(x)>0 \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)}>0$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0. \end{cases}$$

7. Множество решений каждого из неравенств

$$f(x)\cdot g(x)<0 \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)}<0$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Пример 1. Решим неравенство

$$\frac{\sin x}{\lg(x+1)}>0. \qquad (1)$$

Решение. По утверждению 6 множество решений неравенства (1) есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases}\sin x > 0\\ \lg(x+1) > 0\end{cases} \qquad (2)$$

и

$$\begin{cases}\sin x < 0\\ \lg(x+1) < 0.\end{cases} \qquad (3)$$

Все решения первого неравенства системы (2) составляют серию промежутков $(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Все решения второго неравенства системы (2) составляют промежуток $(0;\ +\infty)$. Поэтому все решения системы (2) составляют серию промежутков $(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $k\geqslant 0$.

Все решения второго неравенства системы (3) составляют промежуток $(-1;\ 0)$. Так как $\sin x<0$ для всех $x\in(-1;\ 0)$, то все решения системы (3) составляют промежуток $(-1;\ 0)$. Следовательно, все решения неравепства (1) есть объединение всех найденных решений.

Ответ. $(-1;\ 0)\cup(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $k\geqslant 0$.

Отметим, что при решении неравенств часто приходится применять несколько преобразований.

Пример 2. Решим неравенство

$$\sqrt[10]{x+1} < \sqrt[10]{\sqrt{1-2x}-x}. \qquad (4)$$

Решение. По утверждению 3 неравенство (4) равносильно двойному неравенству $0\leqslant x+1<\sqrt{1-2x}-x$, которое можно переписать в виде системы

$$\begin{cases}\sqrt{1-2x} > 2x+1\\ x\geqslant -1.\end{cases} \qquad (5)$$

Применяя утверждение 2, получим, что множество решений системы (5) есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases}1-2x>(2x+1)^2\\ 2x+1\geqslant 0\\ x\geqslant -1\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ 2x+1<0\\ x\geqslant -1.\end{cases} \qquad (6)$$

Множество решений первой из систем (6) есть промежуток $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)$, а множество решений второй из систем (6) есть промежуток $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right)$. Объединив эти множества, получим, что множество решений системы (5), а значит, и равносильного ей неравенства (4) составляет промежуток $[-1;\ 0)$.

Ответ. $[-1;\ 0)$.

При решении неравенств с параметром также можно применять преобразования, приводящие к равносильным системам.

Пример 3. Для каждого значения параметра a решим неравенство

$$\sqrt{3-x}<\sqrt{x-a}. \qquad (7)$$

Решение. Для каждого значения параметра a неравенство (7) равносильно двойному неравенству

$$0\leqslant 3-x<x-a,$$

которое можно записать в виде системы

$$\begin{cases} x\leqslant 3 \\ x>\dfrac{a+3}{2}. \end{cases} \qquad (8)$$

Если $\dfrac{a+3}{2}<3$, т. е. если $a<3$, то все решения системы (8), а значит, и равносильного ей неравенства (7) составляют промежуток $\left(\dfrac{a+3}{2};\ 3\right]$. Если $\dfrac{a+3}{2}\geqslant 3$, т. е. если $a\geqslant 3$, то система (8), а значит, и равносильное ей неравенство (7) не имеют решений.

Ответ. $\left(\dfrac{a+3}{2};\ 3\right]$ при $a<3$; нет решений при $a\geqslant 3$.

38*. Неравенства вида $f(\alpha(x))>f(\beta(x))$

Справедливо следующее утверждение:

1. Пусть область существования функции $f(u)$ есть промежуток J. Тогда:

а) если функция $f(u)$ возрастает на промежутке J, то неравенство $f(\alpha(x))>f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x)>\beta(x) \\ \alpha(x)\in J \\ \beta(x)\in J; \end{cases}$$

б) если функция $f(u)$ убывает на промежутке J, то неравенство $f(\alpha(x))>f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x)<\beta(x) \\ \alpha(x)\in J \\ \beta(x)\in J. \end{cases}$$

Частными случаями утверждения 1 являются утверждения 3 и 4 из п. 36.

Пример 1. Решим неравенство

$$\arccos(x-2)>\arccos(3-x). \qquad (1)$$

Решение. Область существования функции $f(u)=$ $=\arccos u$ есть промежуток $J=[-1;\ 1]$. На этом промежутке функция $f(u)$ убывает, поэтому по утверждению 1 неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x-2<3-x \\ -1\leqslant x-2\leqslant 1 \\ -1\leqslant 3-x\leqslant 1, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} -1\leqslant x-2 \\ x-2<3-x \\ 3-x\leqslant 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Все решения системы (2), а значит, и равносильного ей неравенства (1) составляют промежуток $[2;\ 2{,}5)$.

Ответ. $[2;\ 2{,}5)$.

Пример 2. Решим неравенство $\sqrt[4]{3x-2}+\log_7(3x-2)+$

$$+3^{\frac{3x-2}{4}}>\sqrt[4]{3-2x}+\log_7(3-2x)+3^{\frac{3-2x}{4}}. \qquad (3)$$

Решение. Область существования функции $f(u)=\sqrt[4]{u}+$ $+\log_7 u+3^{\frac{u}{4}}$ есть промежуток $J=(0;\ +\infty)$. На этом промежутке функция $f(u)$ возрастает как сумма возрастающих на этом промежутке функций, поэтому по утверждению 1 неравенство (3) равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-2>3-2x \\ 3x-2>0 \\ 3-2x>0. \end{cases} \qquad (4)$$

Множество всех решений системы (4), а значит, и равносильного ей неравенства (3) составляет промежуток $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$.

Ответ. $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$.

Из утверждения 1 вытекает следующее утверждение:

2. Пусть область существования функции $f(u)$ есть $\boldsymbol{R}$, тогда:

а) если функция $f(u)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, то равносильны неравенства

$$f(\alpha(x))>f(\beta(x)) \text{ и } \alpha(x)>\beta(x);$$

б) если функция $f(u)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, то равносильны неравенства

$$f(\alpha(x))>f(\beta(x)) \text{ и } \alpha(x)<\beta(x).$$

Частными случаями утверждения 2 являются утверждения 6 и 8 из п. 30.

Пример 3. Решим неравенство

$$(\pi-3)^{x-5}-\sqrt[3]{x-5}>(\pi-3)^{\frac{x-9}{2}}-\sqrt[3]{\frac{x-9}{2}}. \qquad (5)$$

Решение. Область существования функции $f(u)=(\pi-3)^u+\left(-\sqrt[3]{u}\right)$ есть $\boldsymbol{R}$, функция убывает на $\boldsymbol{R}$ как сумма убывающих на $\boldsymbol{R}$ функций, поэтому на основании утверждения 2 неравенство (5) равносильно неравенству

$$x-5<\frac{x-9}{2}. \qquad (6)$$

Множество всех решений неравенства (6), а значит, и равносильного ему неравенства (5) составляет промежуток $(-\infty; 1)$.

Ответ. $(-\infty; 1)$.

39. Равносильность уравнений на множествах

Пусть k — данное натуральное число. Справедливы следующие утверждения:

1. Если в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, то на множестве M равносильны уравнения $f(x)=g(x)$ и $(f(x))^{2k}=(g(x))^{2k}$.

2. Если в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена и отлична от нуля, то на множестве M равносильны уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$.

3. Если в каждой точке множества M определены обе части некоторой формулы (логарифмической, тригонометрической и т. п.), то, применив эту формулу при решении уравнения, получим уравнение, равносильное исходному на множестве M.

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt{x}=\sqrt[3]{2x-1}. \qquad (1)$$

Решение. Если x_0 — корень уравнения (1), то определено выражение $\sqrt{x_0}$ и $\sqrt{x_0}\geqslant 0$, тогда и $\sqrt[3]{2x_0-1}\geqslant 0$, т. е. $x_0\geqslant\frac{1}{2}$. Это означает, что все корни уравнения (1) содержатся в множестве $M=\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

В каждой точке множества M обе функции $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ неотрицательны. Поэтому по утверждению 1 уравнение (1) равносильно на множестве M уравнению

$$\left(\sqrt{x}\right)^6=\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^6,$$

которое можно переписать в виде

$$(x-1)(x^2-3x+1)=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет три корня: $x_1=1$, $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Из них x_1 и x_2 принадлежат множеству M, а x_3 не принадлежит множеству M. Следовательно, уравнение (2) на множестве M имеет два корня: x_1 и x_2. Поэтому и равносильное ему на множестве M уравнение (1) имеет те же два корня.

Ответ. 1; $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}\pi x}{\lg\left(x+\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{\lg\left(x+\frac{3}{4}\right)}. \qquad (3)$$

Решение. Все корни уравнения (3) содержатся в множестве тех x, для которых определен $\lg\left(x+\frac{3}{4}\right)$ и $\lg\left(x+\frac{3}{4}\right)\neq 0$, т. е. содержатся в множестве $M=\left(-\frac{3}{4};\ \frac{1}{4}\right)\cup\cup\left(\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x)=$ $=\lg\left(x+\frac{3}{4}\right)$ определена и отлична от нуля. Поэтому по утверждению 2 уравнение (3) равносильно на множестве M уравнению

$$\operatorname{tg}\pi x=1. \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет одну серию решений $x_k=\frac{1}{4}+k$, $k\in \mathbf{Z}$. Из чисел x_k в множестве M содержатся лишь те, для которых $k>0$. Следовательно, уравнение (4) имеет на множестве M единственную серию решений $x_n=\frac{1}{4}+n$, $n\in \mathbf{N}$. Поэтому и равносильное ему на множестве M уравнение (3) имеет те же решения.

Ответ. $\frac{1}{4}+n$, $n\in \mathbf{N}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2=\frac{3}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right). \qquad (5)$$

Решение. Все корни уравнения (5) содержатся в множестве M — всех x, отличных от нуля. В каждой точке множества M функция $\varphi(x)=x^2$ определена и отлична от нуля. Поэтому по утверждению 2 уравнение (5) равносильно на множестве M уравнению

$$x^2\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=\frac{3}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2,$$

которое можно переписать в виде

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0. \qquad (6)$$

Введя новое неизвестное $t=x+\frac{1}{x}$, перепишем уравнение (6) в виде

$$t^2-3t-4=0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет два корня: $t_1=4$ и $t_2=-1$. Следовательно, только корни двух уравнений $x+\frac{1}{x}=4$ и $x+\frac{1}{x}=-1$ будут корнями уравнения (6). На множестве M по утверждению 2 эти уравнения равносильны соответственно уравнениям

$$x^2-4x+1=0 \text{ и } x^2+x+1=0. \qquad (8)$$

Первое из уравнений (8) имеет два корня: $x_1=2+\sqrt{3}$ и $x_2=2-\sqrt{3}$, принадлежащие множеству M, а второе из уравнений (8) корней не имеет. Следовательно, уравнение (6) имеет на множестве M два корня: x_1 и x_2. Поэтому равносильное ему на множестве M уравнение (5) имеет те же два корня.

Ответ. $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$.

Пример 4. Решим уравнение

$$5^{\log_5(x+1)}=x^3-2x^2-2x+1. \qquad (9)$$

Решение. Все корни уравнения (9) содержатся в множестве $M=(-1;\ +\infty)$. В каждой точке множества M определены обе части формулы $5^{\log_5(x+1)}=x+1$. Поэтому уравнение (9) равносильно на множестве M уравнению

$$x+1=x^3-2x^2-2x+1. \qquad (10)$$

Уравнение (10) имеет три корня: $x_1=0$, $x_2=3$ и $x_3=-1$. Из них лишь x_1 и x_2 принадлежат множеству M. Следовательно, уравнение (10) имеет на множестве M два корня: x_1 и x_2. Поэтому равносильное ему на множестве M уравнение (9) имеет те же корни.

Ответ. 0; 3.

Пример 5. Решим уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos x. \qquad (11)$$

Решение. Все корни уравнения (11) содержатся в множестве M — всех $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. В каждой точке множества M определены обе части формулы $\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$, поэтому уравнение (11) равносильно на множестве M уравнению

$$\sin 2x = \cos x. \qquad (12)$$

Применив формулу синуса двойного угла, перепишем уравнение (12) в виде

$$2\cos x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0. \qquad (13)$$

Уравнение (13) имеет две серии решений: $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, и $x_m = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. Числа x_m принадлежат множеству M, а числа x_n нет. Следовательно, уравнение (12) имеет на множестве M серию решений x_m. Поэтому равносильное ему на множестве M уравнение (11) имеет те же решения.

Ответ. $(-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

40*. Равносильность уравнений на множествах (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

4. Если в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, то при $a > 0$ и $a \neq 1$ на множестве M равносильны уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \text{ и } f(x) = g(x).$$

5. Если в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена, то на множестве M равносильны уравнения

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x) \text{ и } f(x) = g(x).$$

При решении уравнений часто приходится применять несколько преобразований.

Пример 1. Решим уравнение

$$\log_x(16x^2 - 1) = \log_x(x^6 - 1). \qquad (1)$$

Решение. Все корни уравнения (1) содержатся в множестве тех x, для каждого из которых $x > 0$, $x \neq 1$, $16x^2 - 1 > 0$, $x^6 - 1 > 0$, т. е. содержатся в множестве $M = (1; +\infty)$. В каждой точке множества M определены обе части формул $\log_x(16x^2 - 1) = \frac{\lg(16x^2-1)}{\lg x}$ и $\log_x(x^6 - 1) = \frac{\lg(x^6-1)}{\lg x}$, поэтому по утверждению 3 уравнение (1) равносильно на множестве M уравнению

$$\frac{\lg(16x^2-1)}{\lg x}=\frac{\lg(x^6-1)}{\lg x}. \qquad (2)$$

В каждой точке множества M функция $\varphi(x)=\lg x$ определена и отлична от нуля, поэтому по утверждению 2 уравнение (2) равносильно на множестве M уравнению

$$\lg(16x^2-1)=\lg(x^6-1). \qquad (3)$$

Так как в каждой точке множества M обе функции $f(x)=16x^2-1$ и $g(x)=x^6-1$ положительны, то по утверждению 4 уравнение (3) равносильно на множестве M уравнению

$$16x^2-1=x^6-1, \qquad (4)$$

имеющему три корня: $x_1=0$, $x_2=2$ и $x_3=-2$. Из них лишь x_2 принадлежит множеству M. Следовательно, уравнение (4) имеет на этом множестве единственный корень x_2. Поэтому равносильное ему на множестве M уравнение (1) имеет тот же корень.

Ответ. 2.

Пример 2. Решим уравнение

$$\lg(3-x)+3\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}-\sqrt{\frac{x-4}{x-1}}=\frac{5}{\sqrt{(x-4)(x-1)}}+\lg(3-x). \qquad (5)$$

Решение. Все корни уравнения (5) содержатся в множестве тех x, для каждого из которых справедливы неравенства $(x-1)(x-4)>0$ и $3-x>0$, т. е. содержатся в множестве $M=(-\infty;\ 1)$. В каждой точке этого множества функция $\varphi(x)=\sqrt{(x-4)(x-1)}$ определена и отлична от нуля, а функция $g(x)=\lg(3-x)$ определена. Поэтому по утверждениям 2 и 5 уравнение (5) равносильно на множестве M уравнению

$$3\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}\cdot\sqrt{(x-4)(x-1)}-\sqrt{\frac{x-4}{x-1}}\cdot\sqrt{(x-4)(x-1)}=5. \qquad (6)$$

Так как $(x-1)(x-4)>0$ в каждой точке множества M, то, применив формулу $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, получим, что уравнение (6) равносильно на множестве M уравнению

$$3\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x-4)^2}=5. \qquad (7)$$

На множестве $M=(-\infty;\ 1)$ уравнение (7) равносильно уравнению $3(1-x)-(4-x)=5$, имеющему единственный корень $x_1=-3$, который принадлежит множеству M. Следовательно, уравнение (7) на множестве M имеет один корень x_1. Поэтому и равносильное ему на множестве M уравнение (5) имеет тот же единственный корень.

Ответ. -3.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=\sqrt{6x+6}. \tag{8}$$

Решение. Все корни уравнения (8) содержатся в множестве тех x, для каждого из которых справедливы неравенства $2x+3\geqslant 0$, $x+5\geqslant 0$, $6x+6\geqslant 0$, т. е. содержатся в множестве $M=[-1; +\infty)$. В каждой точке этого множества функции $f(x)=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}$ и $g(x)=\sqrt{6x+6}$ неотрицательны, поэтому по утверждению 1 уравнение (8) равносильно на множестве M уравнению

$$2x+3+2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+5}+x+5=6x+6,$$

которое можно переписать в виде

$$2\sqrt{(2x+3)(x+5)}=3x-2. \tag{9}$$

Все корни уравнения (9) удовлетворяют неравенству $3x-2\geqslant 0$, т. е. содержатся в множестве $M_1=\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Следовательно, все корни уравнения (8) также содержатся в множестве M_1. В каждой точке этого множества функции $\varphi(x)=2\sqrt{(2x+3)(x+5)}$ и $\psi(x)=3x-2$ неотрицательны, поэтому по утверждению 1 уравнение (9) равносильно на множестве M_1 уравнению

$$4(2x^2+13x+15)=(3x-2)^2. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет два корня: $x_1=32+6\sqrt{30}$ и $x_2=$ $=32-6\sqrt{30}$, из которых лишь x_1 принадлежит множеству M_1. Поэтому уравнение (10) на множестве M_1 имеет единственный корень x_1.

Следовательно, уравнение (8), равносильное на множестве M_1 уравнению (10), имеет тот же единственный корень.

Ответ. $32+6\sqrt{30}$.

Понятие равносильности уравнений на множестве часто помогает решать уравнения с дополнительными условиями.

Пример 4. Найдем все корни уравнения

$$\sin 2x-\cos x+\sqrt{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{11}$$

принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Перенося все члены уравнения в левую часть и применяя формулу синуса двойного угла, перепишем уравнение (11) в виде

$$(2\sin x-1)\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0. \tag{12}$$

Так как в каждой точке множества $M=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\varphi(x)=\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ определена и отлична от нуля, то на множестве M уравнение (12) равносильно уравнению

$$\sin x=\frac{1}{2}. \tag{13}$$

На множестве M уравнение (13) имеет единственный корень $x_1=\frac{\pi}{6}$. Следовательно, и равносильное ему на множестве M уравнение (11) имеет на множестве M тот же корень.

Ответ. $\frac{\pi}{6}$.

При решении уравнений с параметром также можно применять равносильность уравнений на множестве.

Пример 5. Для каждого значения параметра a решим уравнение

$$\frac{ax}{x-3}+\frac{x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}. \tag{14}$$

Решение. Для каждого значения параметра a все корни уравнения (14) содержатся в множестве M — всех действительных чисел, кроме чисел -3 и 3. Так как в каждой точке множества M функция $f(x)=x^2-9$ определена и отлична от нуля, то, умножив уравнение (14) на эту функцию, получим, что для каждого значения параметра a уравнение (14) равносильно на множестве M уравнению

$$ax(x+3)+x(x-3)=18, \tag{15}$$

которое можно переписать в виде

$$(a+1)x^2+(3a-3)x-18=0. \tag{16}$$

При $a=-1$ уравнение (16) имеет единственный корень $x_0=-3$. Так как $x_0\notin M$, то при $a=-1$ уравнение (16) не имеет корней, принадлежащих множеству M. Значит, при $a=-1$ равносильное ему на множестве M уравнение (14) не имеет корней. При $a\neq-1$ уравнение (16) квадратное, его дискриминант $D=9(a+3)^2$.

Если $a=-3$, то уравнение (16) имеет единственный корень $x_0=-3$, который не принадлежит множеству M. Значит, при $a=-3$ уравнение (14), равносильное на множестве M уравнению (16), не имеет корней.

Если $a\neq-1$ и $a\neq-3$, то уравнение (16) имеет два корня: $x_1=-3$ и $x_2=\frac{6}{a+1}$. Корень x_1 не принадлежит множеству M.

Выясним, при каких значениях a корень x_2 принадлежит множеству M. Так как $\frac{6}{a+1}=3$ только при $a=1$, $\frac{6}{a+1}=-3$ только при $a=-3$, то $x_2 \in M$ при каждом $a \neq 1$ ($a \neq -1$, $a \neq -3$).

Итак, при $a=1$ уравнение (16) имеет два корня: $x_1=-3$ и $x_2=3$, не принадлежащие множеству M. Значит, при $a=1$ уравнение (14), равносильное на множестве M уравнению (16), не имеет корней. При любом a, таком, что $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq -3$, уравнение (16) имеет один корень $x_2 \in M$. Значит, при каждом таком a равносильное ему на множестве M уравнение (14) имеет один корень x_2.

Ответ. Нет корней при $a=1$, при $a=-1$, при $a=-3$; единственный корень $\frac{6}{a+1}$ при $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq -3$.

41. Равносильность неравенств на множествах

Пусть k — данное натуральное число. Справедливы следующие утверждения:

1. Если в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, то на множестве M равносильны неравенства $f(x)<g(x)$ и $(f(x))^{2k}<(g(x))^{2k}$.

2. Если в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена и положительна, то на множестве M равносильны неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)\varphi(x)<g(x)\varphi(x)$.

3. Если в каждой точке множества M определены обе части некоторой формулы (логарифмической, тригонометрической и т. п.), то, применив эту формулу при решении неравенства, получим неравенство того же знака, равносильное исходному на множестве M.

Пример 1. Решим неравенство

$$\sqrt{x}<\sqrt[4]{2x+3}. \qquad (1)$$

Решение. Все решения неравенства (1) содержатся в множестве $M=[0; +\infty)$. В каждой точке множества M обе функции $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\sqrt[4]{2x+3}$ неотрицательны. Поэтому по утверждению 1 неравенство (1) равносильно на множестве M неравенству

$$\left(\sqrt{x}\right)^4<\left(\sqrt[4]{2x+3}\right)^4,$$

которое можно переписать в виде

$$x^2-2x-3<0. \qquad (2)$$

Все решения неравенства (2) составляют промежуток $(-1; 3)$, из них множеству M принадлежат все x из промежутка $[0; 3)$. Следовательно, все решения неравенства (2) на множестве M составляют промежуток $[0; 3)$. Поэтому и равносильное ему на этом множестве неравенство (1) имеет те же решения.

Ответ. $[0; 3)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$\sqrt{2x+1} > \sqrt[3]{7x-1}. \qquad (3)$$

Решение. Все решения неравенства (3) содержатся в множестве тех x, для каждого из которых $2x+1 \geqslant 0$, т. е. содержатся в множестве $M = [-0{,}5; +\infty)$.

1) Очевидно, что все x из M, для которых $7x-1<0$, т. е. все $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{7}\right)$, являются решениями неравенства (3).

2) В каждой точке множества $M_1 = \left[\frac{1}{7}; +\infty\right)$ обе функции $f(x) = \sqrt{2x+1}$ и $g(x) = \sqrt[3]{7x-1}$ неотрицательны. Поэтому по утверждению 1 неравенство (3) равносильно на множестве M_1 неравенству

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^6 > \left(\sqrt[3]{7x-1}\right)^6,$$

которое можно переписать в виде

$$x(8x^2-37x+20) > 0. \qquad (4)$$

Все решения неравенства (4) составляют два промежутка $\left(0; \frac{5}{8}\right)$ и $(4; +\infty)$. Из них множеству M_1 принадлежат все x из промежутков $\left[\frac{1}{7}; \frac{5}{8}\right)$ и $(4; +\infty)$. Следовательно, все решения неравенства (4) на множестве M_1 составляют два промежутка $\left[\frac{1}{7}; \frac{5}{8}\right)$ и $(4; +\infty)$. Поэтому и неравенство (3), равносильное на множестве M_1 неравенству (4), имеет на множестве M_1 те же решения.

Объединяя все решения, найденные в случаях 1 и 2, получаем, что множество решений неравенства (3) составляют два промежутка $\left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right) \cup (4; +\infty)$.

Ответ. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right) \cup (4; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\frac{x^2}{1-\cos \pi x} < \frac{3-2x}{1-\cos \pi x}. \qquad (5)$$

Решение. Все решения неравенства (5) содержатся в множестве тех x, для каждого из которых $1-\cos\pi x\neq 0$, т. е. содержатся в множестве M — всех $x\neq 2k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x)=1-\cos\pi x$ определена и положительна, поэтому по утверждению 2 неравенство (5) равносильно на множестве M неравенству

$$x^2<3-2x, \tag{6}$$

все решения которого составляют промежуток $(-3;\ 1)$. Из этих чисел множеству M принадлежат все x из промежутков $(-3;\ -2)$, $(-2;\ 0)$ и $(0;\ 1)$. Следовательно, неравенство (5), равносильное на множестве M неравенству (6), имеет те же решения.

Ответ. $(-3;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(0;\ 1)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$\frac{2\sin x}{\sqrt{18-3x-x^2}}>\frac{1}{\sqrt{18-3x-x^2}}. \tag{7}$$

Решение. Все решения неравенства (7) содержатся в множестве тех x, для каждого из которых $18-3x-x^2>0$, т. е. содержатся в множестве $M=(-6;\ 3)$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x)=\sqrt{18-3x-x^2}$ определена и положительна. Поэтому по утверждению 2 неравенство (7) равносильно на множестве M неравенству

$$2\sin x>1, \tag{8}$$

все решения которого составляют серию промежутков $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Из этих промежутков множеству M принадлежат лишь те, для которых $n=0$ или $n=-1$. Следовательно, неравенство (8) имеет на множестве M решения, составляющие два промежутка: $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$ и $\left(-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6}\right)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (7) имеет те же решения.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6}\right)$.

Пример 5. Решим неравенство

$$\log_2^2 x<\frac{1}{\log_x 2}. \tag{9}$$

Решение. Все решения неравенства (9) содержатся в множестве M — всех положительных x, отличных от 1. В каждой точке множества M определены обе части формулы $\frac{1}{\log_x 2}=\log_2 x$. Поэтому по утверждению 3 неравество (9) равносильно на множестве M неравенству

$$\log_2^2 x < \log_2 x. \qquad (10)$$

Обозначив $t = \log_2 x$, перепишем неравенство (10) в виде

$$t^2 < t. \qquad (11)$$

Множество всех решений неравенства (11) есть промежуток $0 < t < 1$. Поэтому множество решений неравенства (10) есть множество решений двойного неравенства

$$0 < \log_2 x < 1. \qquad (12)$$

Множество всех решений неравенства (12) есть промежуток $(1; 2)$. Все эти x содержатся в множестве M, т. е. являются решениями неравенства (10) на множестве M. Следовательно, неравенство (9), равносильное на множестве M неравенству (10), имеет те же решения.

Ответ. $(1; 2)$.

Пример 6. Решим неравенство

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x < 2 \sin x. \qquad (13)$$

Решение. Все решения неравенства (13) содержатся в множестве M всех $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. В каждой точке множества M имеют смысл обе части формулы $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$. Поэтому по утверждению 3 неравенство (13) равносильно на множестве M неравенству

$$\sin x > \frac{1}{2}, \qquad (14)$$

все решения которого составляют серию промежутков $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Из этих чисел множеству M принадлежат лишь числа x из двух серий промежутков $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, эти две серии и составляют множество всех решений неравенства (14) на множестве M. Так как неравенства (13) и (14) равносильны на множестве M, то неравенство (13) имеет те же решения.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

42*. Равносильность неравенств на множествах (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

4. Если в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, то на множестве M:

при $a>1$ равносильны неравенства

$$\log_a f(x)<\log_a g(x) \text{ и } f(x)<g(x);$$

при $0<a<1$ равносильны неравенства

$$\log_a f(x)<\log_a g(x) \text{ и } f(x)>g(x).$$

5. Если в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена, то на множестве M равносильны неравенства

$$f(x)+\varphi(x)<g(x)+\varphi(x) \text{ и } f(x)<g(x).$$

При решении неравенств часто приходится применять несколько преобразований, приводящих к неравенствам, равносильным исходному на некотором множестве.

Пример 1. Решим неравенство

$$\log_x(x+3)>\log_x(2x+1). \qquad (1)$$

Решение. Все решения неравенства (1) содержатся в множестве M — всех положительных x, отличных от 1. В каждой точке множества $M=(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ определены обе части формул $\log_x(x+3)=\dfrac{\lg(x+3)}{\lg x}$ и $\log_x(2x+1)=$ $=\dfrac{\lg(2x+1)}{\lg x}$, поэтому по утверждению 3 неравенство (1) равносильно на множестве M неравенству

$$\frac{\lg(x+3)}{\lg x}>\frac{\lg(2x+1)}{\lg x}. \qquad (2)$$

Рассмотрим два случая.

1) В каждой точке множества $M_1=(1;\ +\infty)$ функция $\varphi(x)=\lg x$ положительна, поэтому по утверждению 2 неравенство (8) равносильно на множестве M_1 неравенству

$$\lg(x+3)>\lg(2x+1). \qquad (3)$$

Так как в каждой точке множества M_1 обе функции $f(x)=x+3$ и $g(x)=2x+1$ положительны, то по утверждению 4 неравенство (3) равносильно на множестве M_1 неравенству

$$x+3>2x+1, \qquad (4)$$

все решения которого составляют промежуток $(-\infty;\ 2)$. Из этих чисел множеству M_1 принадлежат лишь x из промежутка $(1;\ 2)$. Так как неравенство (1) равносильно на множестве M_1 неравенству (4), то оно имеет на множестве M_1 те же решения.

2) В каждой точке множества $M_2=(0;\ 1)$ функция $\varphi(x)=\lg x$ отрицательна, поэтому по утверждению 2 неравенство (2) равносильно на множестве M_2 неравенству

$$\lg(x+3)<\lg(2x+1). \qquad (5)$$

Так как в каждой точке множества M_2 обе функции $f(x)=x+3$ и $g(x)=2x+1$ положительны, то по утверждению 4 неравенство (5) равносильно на множестве M_2 неравенству

$$x+3<2x+1, \qquad (6)$$

все решения которого составляют промежуток $(2; +\infty)$. Из этих чисел множеству M_2 не принадлежит ни одно число. Следовательно, неравенство (6) не имеет на множестве M_2 решений. Поэтому и равносильное ему на множестве M_2 неравенство (1) не имеет на нем решений.

Итак, все решения неравенства (1) составляют промежуток $(1; 2)$.

Ответ. $(1; 2)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+4)+\sqrt{1-x^2}<2+\sqrt{1-x^2}. \qquad (7)$$

Решение. Все решения неравенства (7) содержатся среди x, удовлетворяющих неравенствам $x+1>0$, $x+4>0$, $1-x^2\geqslant 0$, т. е. содержатся в множестве $M=(-1; 1]$. В каждой точке множества M определена функция $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ и определены обе части формулы

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+4)=\log_2((x+1)(x+4)).$$

Поэтому по утверждениям 3 и 5 неравенство (7) равносильно на множестве M неравенству

$$\log_2((x+1)(x+4))<2. \qquad (8)$$

Так как функция $f(x)=(x+1)(x+4)$ положительна на множестве M и $2=\log_2 4$, то неравенство (8) равносильно на множестве M неравенству

$$(x+1)(x+4)<4. \qquad (9)$$

Все решения неравенства (9) составляют промежуток $(-5; 0)$, из этих чисел множеству M принадлежат лишь x из промежутка $(-1; 0)$. Следовательно, все решения неравенства (9) на множестве M составляют промежуток $(-1; 0)$. Поэтому неравенство (7), равносильное на множестве M неравенству (9), имеет те же решения.

Ответ. $(-1; 0)$.

Понятие равносильности неравенства на множестве часто помогает решать неравенства с дополнительными условиями.

Пример 3. Найдем все решения неравенства

$$|x^2-5x-2|<2x-2, \qquad (10)$$

удовлетворяющие условию $x<5$.

Решение. Все решения неравенства (10) должны удовлетворять условию $2x-2>0$. Поэтому требуется найти решения неравенства (10), принадлежащие множеству $M=(1;\ 5)$. Так как для любого x из этого множества квадратный трехчлен x^2-5x-2 принимает только отрицательные значения, то на множестве M неравенство (10) равносильно неравенству

$$-(x^2-5x-2)<2x-2, \tag{11}$$

решения которого составляют два промежутка $(-\infty;\ -1)$ и $(4;\ +\infty)$. Из этих чисел множеству M принадлежат лишь x из промежутка $(4;\ 5)$.

Следовательно, на множестве M неравенство (11) имеет решения, составляющие промежуток $(4;\ 5)$. Поэтому решения неравенства (10), удовлетворяющие условию $x<5$, составляют тот же промежуток $(4;\ 5)$.

Ответ. $(4;\ 5)$.

При решении неравенств с параметром также можно применять равносильность неравенств на множестве.

Пример 4. При каждом значении параметра a решим неравенство

$$\log_a(8-x)<2\log_a(x-2). \tag{12}$$

Решение. По определению логарифма при $a=1$ и при $a<0$ обе части неравенства (12) не определены, поэтому при этих значениях a неравенство (12) не имеет решений.

При каждом $a>0$ и $a\neq 1$ обе части неравенства (12) определены только на интервале $M=(2;\ 8)$, поэтому все решения неравенства (12) в этом случае принадлежат интервалу M. По утверждению 3 неравенство (12) равносильно на множестве M неравенству

$$\log_a(8-x)<\log_a(x-2)^2. \tag{13}$$

Если $a>1$, то по утверждению 4 неравенство (13) равносильно на множестве M неравенству $8-x<(x-2)^2$, все решения которого составляют два промежутка $(-\infty;\ -1)$ и $(4;\ +\infty)$, из этих чисел множеству M принадлежат лишь x из промежутка $(4;\ 8)$. Следовательно, при $a>1$ множество решений неравенства (13) на интервале M составляет промежуток $(4;\ 8)$. Поэтому при $a>1$ решения неравенства (12), равносильного неравенству (13) на интервале M, составляют тот же промежуток $(4;\ 8)$.

Если $0<a<1$, то по утверждению 4 неравенство (13) на множестве M равносильно неравенству $8-x>(x-2)^2$, все решения которого составляют промежуток $(-1;\ 4)$, из этих чисел множеству M принадлежат лишь x из промежутка $(2;\ 4)$. Следовательно, при $0<a<1$ множество решений неравенства (13) на интервале M есть промежуток $(2;\ 4)$. Поэтому при $0<a<1$ решения неравенства (12), равносильного неравенству (13) на интервале M, составляют тот же промежуток (2; 4).

Ответ. Нет решений при $a=1$ и при $a<0$; (4; 8) при $a>1$; (2; 4) при $0<a<1$.

43. Уравнения и неравенства с модулями

Понятие равносильности уравнений (неравенств) на множестве часто помогает при решении уравнений (неравенств) с модулями.

Чтобы решить уравнение или неравенство, содержащее модули некоторых функций $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$, ..., $|f_n(x)|$, сначала решают каждое из уравнений $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, ..., $f_n(x)=0$, отмечают на координатной оси все полученные корни, т. е. разбивают координатную ось на некоторое количество промежутков. Затем на каждом таком промежутке уравнение (неравенство) заменяют на равносильное ему на этом промежутке уравнение (неравенство), не содержащее модулей; находят все решения уравнения (неравенства) на каждом промежутке и объединяют все найденные решения.

Пример 1. Решим уравнение

$$|x-3|+|x+3|=8. \qquad (1)$$

Решение. Сначала решим уравнения $x-3=0$ и $x+3=0$ и отметим на координатной оси полученные корни 3 и -3. Получим три промежутка $(-\infty; -3)$, $[-3; 3]$, $(3; +\infty)$ (рис. 48).

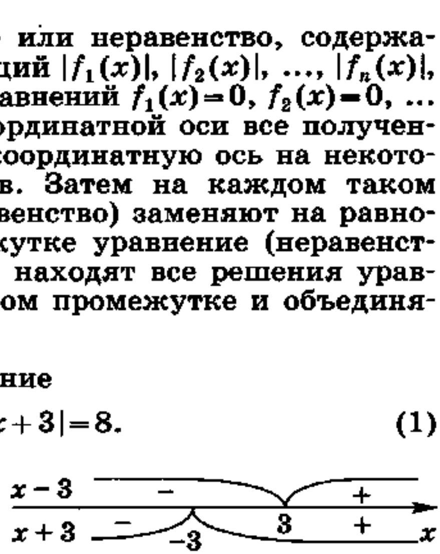

Рис. 48

Решим уравнение (1) на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $(-\infty; -3)$ получаем, что $|x-3|=-(x-3)$ и $|x+3|=-(x+3)$, поэтому на этом промежутке уравнение (1) равносильно уравнению $-x+3-x-3=8$, имеющему единственный корень $x_1=-4$. Так как число -4 принадлежит промежутку $(-\infty; -3)$, то -4 — единственный корень уравнения (1) на этом промежутке.

2) На промежутке $[-3; 3]$ уравнение (1) равносильно уравнению $-x+3+x+3=8$, не имеющему корней. Следовательно, уравнение (1) на этом промежутке не имеет корней.

3) На промежутке $(3; +\infty)$ уравнение (1) равносильно уравнению $x-3+x+3=8$, имеющему единственный

корень $x_2=4$. Так как число 4 принадлежит промежутку $(3; +\infty)$, то 4 — единственный корень уравнения (1) на этом промежутке.

Объединяя все найденные корни уравнения (1), получим, что оно имеет два корня: -4 и 4.

Ответ. -4; 4.

Пример 2. Решим неравенство

$$|x+1|+|2x+4|<7. \qquad (2)$$

Решение. Сначала решим уравнения $x+1=0$ и $2x+4=0$ и отметим на координатной оси полученные корни -1 и -2. Получим три промежутка $(-\infty; -2)$, $[-2; -1]$, $(-1; +\infty)$ (рис. 49).

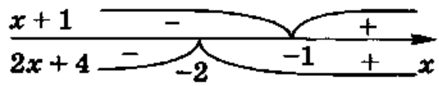

Рис. 49

Решим неравенство (2) на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $(-\infty; -2)$ получаем, что $|x+1|=-(x+1)$ и $|2x+4|=-(2x+4)$, поэтому на этом промежутке неравенство (2) равносильно неравенству

$$-x-1-2x-4<7,$$

множество решений которого — интервал $(-4; +\infty)$. Из этих чисел рассматриваемому промежутку принадлежат лишь $x\in(-4; -2)$.

2) На промежутке $[-2; -1]$ неравенство (2) равносильно неравенству

$$-x-1+2x+4<7,$$

множество решений которого — интервал $(-\infty; 4)$. Из этих чисел рассматриваемому промежутку принадлежат лишь $x\in[-2; -1]$.

3) На промежутке $(-1; +\infty)$ неравенство (2) равносильно неравенству

$$x+1+2x+4<7,$$

множество решений которого — интервал $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. Из этих чисел рассматриваемому промежутку принадлежат лишь $x\in\left(-1; \frac{2}{3}\right)$.

Объединяя все найденные решения неравенства (2), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(-4; \frac{2}{3}\right)$.

Ответ. $\left(-4; \frac{2}{3}\right)$.

Пример 3. Решим уравнение

$$|x^2-4|+|x^2-9|=2x+11. \qquad (3)$$

Решение. Сначала решим уравнения $x^2-4=0$ и $x^2-9=0$ и отметим на координатной оси полученные корни 2 и -2, 3 и -3. Получим пять промежутков $(-\infty; -3]$, $(-3; -2)$, $[-2; 2]$, $(2; 3)$, $[3; +\infty)$ (рис. 50).

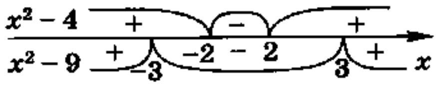

Рис. 50

Решим уравнение (3) на каждом из этих промежутков, объединяя те из них, на которых знаки функций одинаковы.

1) На множестве $M_1=(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$ получаем, что $|x^2-4|=x^2-4$ и $|x^2-9|=x^2-9$, поэтому на этом множестве уравнение (3) равносильно уравнению $x^2-4+x^2-9=2x+11$, имеющему два корня: $x_1=4$ и $x_2=-3$. Так как оба числа x_1 и x_2 принадлежат множеству M_1, то уравнение (3) на множестве M_1 имеет два корня: x_1 и x_2.

2) На множестве $M_2=(-3; -2)\cup(2; 3)$ уравнение (1) равносильно уравнению $x^2-4-x^2+9=2x+11$, имеющему единственный корень -3. Так как $-3\notin M_2$, то уравнение (3) па этом множестве не имеет корней.

3) На промежутке $[-2; 2]$ уравнение (3) равносильно уравнению $-x^2+4-x^2+9=2x+11$, имеющему два корня: $x_3=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_4=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Так как оба числа x_3 и x_4 принадлежат промежутку $[-2; 2]$, то уравнение (3) на этом промежутке имеет два корня: x_3 и x_4.

Объединяя все найденные корни уравнения (3), получаем, что это уравнение имеет четыре корня: x_1, x_2, x_3 и x_4.

Ответ. -3; 4; $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Есть уравнения (неравенства) с модулями, решение которых общими методами приводит к рассмотрению его на нескольких промежутках. Однако если заметить некоторые особенности уравнения (неравенства), то его решение можно намного упростить.

Пример 4. Решим неравенство

$$|x^2-3x-5|>|x^2-2x-2|. \qquad (4)$$

Решение. Для каждого $x\in\boldsymbol{R}$ обе функции $f(x)=|x^2-3x-5|$ и $g(x)=|x^2-2x-2|$ неотрицательны, поэтому по утверждению 1 (п. 41) неравенство (4) равносильно неравенству

$$(x^2-3x-5)^2>(x^2-2x-2)^2,$$

которое можно переписать в виде

$$(x^2-3x-5-x^2+2x+2)(x^2-3x-5+x^2-2x-2)>0. \qquad (5)$$

Неравенство (5) можно переписать в виде

$$(x+3)(x+1)(x-3{,}5)<0. \qquad (6)$$

Применяя метод интервалов (рис. 51), найдем, что все решения неравенства (6), а значит, и равносильного ему на множестве M неравенства (4) составляют множество $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 3{,}5)$.

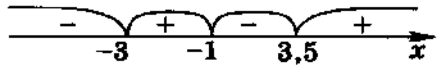

Рис. 51

Ответ. $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 3{,}5)$.

Справедливо следующее утверждение:

Уравнение $|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$

Пример 5. Решим уравнение

$$|x^2-x-6|+|x^2-6x+5|=2x^2-7x-1. \qquad (7)$$

Решение. Уравнение (7) имеет вид

$$|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x),$$

где $f(x)=x^2-x-6$, $g(x)=x^2-6x+5$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0 \\ x^2-6x+5\geqslant 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Решив каждое неравенство системы (8), найдем пересечение множеств их решений (рис. 52). Это и будет решение системы (8).

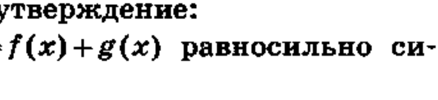

Рис. 52

Все решения системы (8) и равносильного ей уравнения (7) составляют множество $(-\infty;\ -2]\cup[5;\ +\infty)$.

Ответ. $(-\infty;\ -2]\cup[5;\ +\infty)$.

44*. Уравнения вида $\varphi(\varphi(x))=x$

Справедливо следующее утверждение:

Пусть функция $\varphi(x)$ возрастает на промежутке X и пусть $\varphi(x_0)\in X$ для любого $x_0\in X$, тогда уравнения $\varphi(x)=x$ и $\varphi(\varphi(x))=x$ равносильны на промежутке X.

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt{\sqrt{|x|-1}+\frac{3}{4}}+\frac{7}{4}=x. \qquad (1)$$

Решение. В силу определения квадратного корня получаем, что уравнение (1) имеет корни тогда и только тогда, когда они принадлежат промежутку $X=\left[\frac{7}{4};\ +\infty\right)$. Поэтому далее будем рассматривать уравнение (1) на этом промежутке. На нем уравнение (1) можно переписать в виде

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+\frac{7}{4}\right)-1}+\frac{7}{4}=x. \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\sqrt{x-1}+\frac{7}{4}$ на промежутке X. Ясно, что $\varphi(x)$ возрастает на этом промежутке и $\varphi(x_0)\in X$ для любого $x_0\in X$. Так как уравнение (2) можно записать в виде $\varphi(\varphi(x))=x$, то на основании утверждения уравнение (2) равносильно на промежутке X уравнению

$$\sqrt{x-1}+\frac{7}{4}=x,$$

которое имеет единственный корень $x_1=\frac{13}{4}$. Следовательно, и равносильное ему на промежутке X уравнение (1) имеет единственный корень x_1.

Ответ. $\frac{13}{4}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6}+6}=x. \qquad (3)$$

Решение. Функция $\varphi(x)=\sqrt[3]{x+6}$ возрастает на промежутке $\boldsymbol{R}$. Тогда на основании утверждения уравнение (3) равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{x+6}=x. \qquad (4)$$

Возводя уравнение (4) в третью степень, получим, что оно равносильно уравнению $x+6=x^3$, которое имеет единственный корень $x_1=2$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (3) также имеет единственный корень x_1.

Ответ. 2.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^3-24=\sqrt[3]{x+24}. \qquad (5)$$

Решение. Возведем уравнение (5) в третью степень, затем перенесем слагаемое 24 в левую часть уравнения. Получим уравнение, равносильное уравнению (5):

$$(x^3-24)^3-24=x. \qquad (6)$$

Функция $\varphi(x)=x^3-24$ возрастает на промежутке $\boldsymbol{R}$, поэтому уравнение (6) равносильно уравнению $x^3-24=x$, имеющему единственный корень $x_1=3$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (5) имеет тот же единственный корень.

Ответ. 3.

Пример 4. Решим уравнение

$$7\sqrt[3]{7x-6}=x^3+6. \tag{7}$$

Решение. Перенесем слагаемое 6 в левую часть уравнения, затем извлечем из обеих частей уравнения корень третьей степени. Получим уравнение, равносильное уравнению (7):

$$\sqrt[3]{7(\sqrt[3]{7x-6})-6}=x. \tag{8}$$

Функция $\varphi(x)=\sqrt[3]{7x-6}$ возрастает на промежутке $\boldsymbol{R}$, поэтому уравнение (8) равносильно уравнению $\sqrt[3]{7x-6}=x$, имеющему три корня: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (7) имеет те же три корня.

Ответ. 1; 2; -3.

45. Метод интервалов для непрерывных функций

Для решения неравенств $f(x)>0$ и $f(x)<0$, где функция $f(x)$ непрерывна на некоторых промежутках, применим метод интервалов, суть которого будет ясна из рассмотрения примера.

Пример. Решим неравенство

$$2^{\sqrt{x^2-4}}\cdot(x-6)\cdot\log_3(10-x)<0. \tag{1}$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=2^{\sqrt{x^2-4}}\cdot(x-6)\log_3(10-x)$$

и исследуем ее свойства.

1) Найдем $D(f)$ — область существования функции $f(x)$. Ясно, что множество $D(f)$ есть множество решений системы неравенств

$$\begin{cases}x^2-4\geqslant 0\\10-x>0.\end{cases} \tag{2}$$

Решив систему (2), получим, что $D(f)=(-\infty;\ -2]\cup[2;\ 10)$.

2) Проверим, удовлетворяют ли концы промежутков, составляющих множество $D(f)$, т. е. числа -2 и 2, нера-

венству (1). Легко убедиться, что числа -2 и 2 удовлетворяют неравенству (1), т. е. являются его решениями.

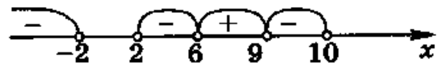

Рис. 53

3) Найдем нули функции $f(x)$. Это будут числа 6 и 9, и они не являются решениями неравенства (1).

4) Теперь надо определить знак функции $f(x)$ на каждом из четырех интервалов (рис. 53):

$$(-\infty;\ -2),\ (2;\ 6),\ (6;\ 9),\ (9;\ 10). \tag{3}$$

Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из этих интервалов, и поэтому ее значения имеют один и тот же знак в каждой точке данного интервала. Определим знак функции $f(x)$ на каждом из интервалов (3).

Поскольку $-4\in(-\infty;\ -2)$ и $f(-4)<0$; $4\in(2;\ 6)$ и $f(4)<0$; $7\in(6;\ 9)$ и $f(7)>0$; $9{,}5\in(9;\ 10)$ и $f(9{,}5)<0$, то на интервалах $(-\infty;\ -2)$, $(2;\ 6)$ и $(9;\ 10)$ функция принимает отрицательные значения, а на интервале $(6;\ 9)$ — положительные значения.

Следовательно, множество всех решений неравенства (1) есть объединение интервалов $(-\infty;\ -2)$, $(2;\ 6)$, $(9;\ 10)$ и точек -2 и 2.

Ответ. $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ 6)\cup(9;\ 10)$.

Замечание. Если надо решить нестрогое неравенство $f(x)\leqslant 0$, то следует решить строгое неравенство $f(x)<0$ по схеме, рассмотренной в примере, а затем к полученным решениям добавить нули функции $f(x)$.

Например, множество решений неравенства

$$2^{\sqrt{x^2-4}}\cdot(x-6)\cdot\log_3(10-x)\leqslant 0 \tag{4}$$

есть объединение всех решений, найденных в примере, и нулей функции $f(x)$, т. е. чисел 6 и 9. Поэтому решения неравенства (4) составляют множество $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ 6]\cup\cup[9;\ 10)$.

46*. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств

При решении уравнения (или неравенства) иногда может помочь использование свойств (областей определения, неотрицательности, ограниченности, монотонности) функций, входящих в это уравнение (или неравенство).

Пример 1. Решим неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-16}+1\right)\log_3(x^2-7)-\left(\frac{x}{2}+\sqrt{16-x^2}+3\right)<0. \tag{1}$$

Решение. Все решения неравенства содержатся среди тех x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-16\geqslant 0 \\ x^2-7>0 \\ 16-x^2\geqslant 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Системе (2) удовлетворяют лишь два числа $x_1=4$ и $x_2=-4$. Поэтому если неравенство (1) имеет решения, то они могут быть только среди этих двух чисел. Проверка показывает, что число x_1 удовлетворяет неравенству (1), а число x_2 нет. Следовательно, неравенство (1) имеет единственное решение x_1.

Ответ. 4.

Пример 2. Решим уравнение

$$\sqrt{x^2-5x-14}+\left|\log_{0,6}(x^2-14x+50)\right|=0. \qquad (3)$$

Решение. Каждая из данных функций $\sqrt{x^2-5x-14}$ и $\left|\log_{0,6}(x^2-14x+50)\right|$ неотрицательна для любого x из области ее существования, и их сумма равна нулю тогда и только тогда, когда каждая из них равна нулю. Поэтому уравнение (3) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-5x-14}=0 \\ \log_{0,6}(x^2-14x+50)=0, \end{cases} \qquad (4)$$

имеющей единственное решение $x_1=7$. Следовательно, и уравнение (3), равносильное системе (4), имеет то же решение.

Ответ. 7.

Пример 3. Решим неравенство

$$3+x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}\leqslant 3\sin x. \qquad (5)$$

Решение. Перепишем неравенство (5) в виде

$$3+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\leqslant 3\sin x. \qquad (6)$$

Обе части неравенства (6) определены для всех действительных чисел x. Для любого x имеем

$$3\sin x\leqslant 3,\ \ 3+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\geqslant 3, \qquad (7)$$

поэтому неравенство (6) справедливо лишь тогда, когда в неравенствах (7) будет знак равенства, т. е. неравенство (6) равносильно системе

$$\begin{cases} 3+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2=3 \\ \sin x=1, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $x_1=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, и равносильное ей неравенство (5) имеет то же решение.

Ответ. $\frac{\pi}{2}$.

Пример 4. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{x-2}=3-\sqrt{x+1}. \qquad (8)$$

Решение. Обе части уравнения (8) определены для всех x, принадлежащих промежутку $M=[-1; +\infty)$. Функция $\sqrt[3]{x-2}$ возрастает на промежутке M, а функция $3-\sqrt{x+1}$ убывает на промежутке M. Поэтому если уравнение (8) имеет корень, то этот корень единственный.

Проверка показывает, что число $x_0=3$ удовлетворяет уравнению (8), следовательно, уравнение (8) имеет единственный корень x_0.

Ответ. 3.

47*. Рассуждения с числовыми значениями при решении уравнений и неравенств

Пример 1. Решим уравнение

$$\sin x \cos 6x=-1. \qquad (1)$$

Решение. Если число x_0 — решение уравнения (1), то справедливо числовое равенство

$$\sin x_0 \cos 6x_0=-1, \qquad (2)$$

откуда либо $\sin x_0=1$, либо $\sin x_0=-1$. Действительно, если бы было справедливо неравенство $|\sin x_0|<1$, то из равенства (2) следовало бы, что $|\cos 6x_0|>1$, что, естественно, невозможно.

Но если $\sin x_0=1$, то $\cos 6x_0=-1$; если же $\sin x_0=-1$, то $\cos 6x_0=1$. Следовательно, любое решение уравнения (1) является либо решением системы

$$\begin{cases} \sin x=1 \\ \cos 6x=-1, \end{cases} \qquad (3)$$

либо решением системы

$$\begin{cases} \sin x=-1 \\ \cos 6x=1. \end{cases} \qquad (4)$$

Легко видеть, что любое решение системы (3) или системы (4) является решением уравнения (1). Следовательно, множество решений уравнения (1) есть объединение множеств решений систем (3) и (4).

Первое уравнение системы (3) имеет единственную серию решений $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Каждое из чисел x_k удовлетворяет второму уравнению системы (3), следовательно, система (3) имеет единственную серию решений x_k.

Первое уравнение системы (4) имеет единственную серию решений $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Ни одно из чисел x_n не удовлетворяет второму уравнению системы (4), следовательно, система (4) не имеет решений.

Итак, все решения уравнения (1) составляют единственную серию x_k.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим неравенство

$$5\sin^7 x + 2\cos^{11} 4x \geqslant 7. \qquad (5)$$

Решение. Если число x_0 — решение неравенства (5), то справедливо числовое неравенство

$$5\sin^7 x_0 + 2\cos^{11} 4x_0 \geqslant 7. \qquad (6)$$

Из неравенства (6) следует, что $\sin x_0 = 1$. Действительно, если было бы справедливо неравенство $\sin x_0 < 1$, то из неравенства (6) следовало бы, что $\cos 4x_0 > 1$, что, естественно, невозможно. Но если $\sin x_0 = 1$, то из неравенства (6) следует, что $\cos 4x_0 = 1$. Следовательно, любое решение неравенства (5) является решением системы

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 4x = 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Легко видеть, что любое решение системы (7) является решением неравенства (5). Следовательно, неравенство (5) равносильно системе (7).

Первое уравнение системы (7) имеет единственную серию решений $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Каждое из чисел x_k удовлетворяет второму уравнению системы (7), следовательно, система (7), а значит, и равносильное ей неравенство (5) имеют единственную серию решений x_k.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sqrt{x^2 - 8} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 8}} = 2 - |\lg(x^2 - 2x - 2)|. \qquad (8)$$

Решение. Если число x_0 — решение уравнения (8), то справедливо числовое равенство

$$\sqrt{x_0^2-8}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2-8}}=2-|\lg(x_0^2-2x_0-2)|. \qquad (9)$$

Это равенство означает, что существуют числа $\sqrt{x_0^2-8}$, $\frac{1}{\sqrt{x_0^2-8}}$, $|\lg(x_0^2-2x_0-2)|$, причем $\sqrt{x_0^2-8}=a>0$. Применяя неравенство $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ для положительного a, получим, что справедливо неравенство

$$\sqrt{x_0^2-8}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2-8}}\geqslant 2. \qquad (10)$$

В то же время справедливо неравенство

$$2-|\lg(x_0^2-2x_0-2)|\leqslant 2. \qquad (11)$$

Из неравенств (10) и (11) следует, что любое решение уравнения (8) является решением системы

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-8}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-8}}=2\\ \lg(x^2-2x-2)=0.\end{cases} \qquad (12)$$

Легко видеть, что любое решение системы (12) является решением уравнения (8). Следовательно, уравнение (8) равносильно системе (12).

Из второго уравнения системы (12) находим все его решения: $x_1=3$ и $x_2=-1$. Нетрудно убедиться, что число x_1 удовлетворяет первому уравнению системы (12), число x_2 нет. Следовательно, система (12), а значит, и равносильное ей уравнение (8) имеют единственное решение x_1.

Ответ. 3.

Пример 4. Решим уравнение

$$\log_2|x|+\log_{|x|}2=2\sin\pi x. \qquad (13)$$

Решение. Если число x_0 — решение уравнения (13), то справедливо числовое равенство

$$\log_2|x_0|+\log_{|x_0|}2=2\sin\pi x_0.$$

Это равенство означает, что существуют числа $\log_2|x_0|$ и $\log_{|x_0|}2$, но тогда число x_0 удовлетворяет или условию $0<|x_0|<1$, или условию $|x_0|>1$. Рассмотрим два случая.

1) Если $0<|x_0|<1$, то $\log_2|x_0|=a<0$ и справедливо неравенство $a+\frac{1}{a}\leqslant -2$. Так как $\log_{|x_0|}2=\frac{1}{\log_2|x_0|}$, то справедливо неравенство

$$\log_2|x_0|+\frac{1}{\log_2|x_0|}\leqslant -2. \qquad (14)$$

Причем $\log_2|x_0|+\frac{1}{\log_2|x_0|}=-2$, если $\log_2|x_0|=-1$.

С другой стороны, справедливо неравенство

$$2\sin \pi x_0\geqslant -2. \qquad (15)$$

Из неравенств (14) и (15) следует, что число x_0 является решением системы

$$\begin{cases}\log_2|x|+\dfrac{1}{\log_2|x|}=-2\\ 2\sin \pi x=-2.\end{cases} \qquad (16)$$

Первое уравнение системы (16) имеет два корня: $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=-\frac{1}{2}$, из которых лишь число x_2 удовлетворяет второму уравнению системы (16). Следовательно, эта система имеет единственное решение x_2.

2) Если $|x_0|>1$, то $\log_2|x_0|=a>0$ и справедливо неравенство $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$. Тогда так как $\log_{|x_0|}2=\frac{1}{\log_2|x_0|}$, то справедливо неравенство

$$\log_2|x_0|+\frac{1}{\log_2|x_0|}\geqslant 2. \qquad (17)$$

Причем $\log_2|x_0|+\frac{1}{\log_2|x_0|}=2$, если $\log_2|x_0|=1$.

С другой стороны, справедливо неравенство

$$2\sin \pi x_0\leqslant 2. \qquad (18)$$

Из неравенств (17) и (18) следует, что число x_0 является решением системы

$$\begin{cases}\log_2|x|+\dfrac{1}{\log_2|x|}=2\\ 2\sin \pi x=2.\end{cases} \qquad (19)$$

Первое уравнение системы (19) имеет два корня: $x_3=2$ и $x_4=-2$, ни одно из которых не удовлетворяет второму уравнению системы. Следовательно, система (19) не имеет решений.

Итак, если уравнение (13) имеет решение x_0, то оно может быть только числом $-0{,}5$. Проверка показывает, что это число является решением уравнения (13).

Следовательно, уравнение (13) имеет единственное решение $-0{,}5$.

Ответ. $-0{,}5$.

48. Системы уравнений с несколькими неизвестными

При решении систем уравнений с несколькими неизвестными применяют методы: а) подстановки; б) линейного преобразования; в) перехода к системе-следствию; г) замены неизвестных.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x \sin y=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Выразив y из первого уравнения и подставив $\frac{\pi}{2}-x$ вместо y во второе уравнение, получим систему

$$\begin{cases} y=\dfrac{\pi}{2}-x \\ \sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную системе (1).

Применяя формулы $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ и $2\sin x\cos x=$ $=\sin 2x$, перепишем второе уравнение системы (2) в виде

$$\sin 2x=1. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет единственную серию решений $x_k=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Подставляя x_k вместо x в первое уравнение системы (2), получаем соответствующие $y_k=\frac{\pi}{4}-\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, все решения уравнения (1) задаются парами $(x_k;\ y_k)$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(x-2)+\sqrt{y+1}=2 \\ \log_3(x-2)-\sqrt{y+1}=-2. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение. Складывая уравнения системы (4), получим систему

$$\begin{cases} \log_3(x-2)+\sqrt{y+1}=2 \\ 2\log_3(x-2)=0, \end{cases} \qquad (5)$$

равносильную системе (4). Второе уравнение системы (5) имеет единственный корень $x_1=3$. Подставляя 3 вместо x в первое уравнение системы (5), находим, что $y_1=3$. Следовательно, система (5), а значит, и равносильная ей система (4) имеют единственное решение $(x_1;\ y_1)$.

Ответ. (3; 3).

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} (0{,}2)^{1+\log_{0,2}(y-x)}=0{,}8 \\ \log_2 y-2\log_2 x=-1. \end{cases} \qquad (6)$$

Решение. Применяя формулы

$$a^{\log_a b}=b,\ 2\log_a b=\log_a b^2,\ \log_a b-\log_a c=\log_a \frac{b}{c},$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} y-x=4 \\ \log_2 \dfrac{y}{x^2}=-1, \end{cases} \qquad (7)$$

являющуюся следствием системы (6). Потенцируя второе уравнение системы (7), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y-x=4 \\ \dfrac{y}{x^2}=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad (8)$$

являющуюся следствием системы (7), а значит, и системы (6). Применяя метод подстановки, находим, что система (8) имеет два решения (4; 8) и (−2; 2).

Так как система (8) является следствием системы (6), то надо проверить, удовлетворяют ли найденные решения системе (6). Проверка показывает, что первая пара удовлетворяет системе (6), а вторая нет. Следовательно, система (6) имеет единственное решение (4; 8).

Ответ. (4; 8).

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}=3 \\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}=3-\sqrt[3]{y^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Решение. Сделав замену неизвестных $u=\sqrt[3]{x}$, $v=\sqrt[3]{y}$, перепишем систему (9) в виде

$$\begin{cases} u-v=3 \\ u^2+uv=3-v^2. \end{cases} \quad (10)$$

Применяя метод подстановки, получим, что система (10) имеет два решения: $u_1=-1$, $v_1=2$ и $u_2=-2$, $v_2=1$. Следовательно, множество всех решений системы (9) есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}=-1 \\ \sqrt[3]{y}=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sqrt[3]{x}=-2 \\ \sqrt[3]{y}=1. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет по одному решению. Следовательно, система (9) имеет два решения: $x_1=-1$, $y_1=8$ и $x_2=-8$, $y_2=1$.

Ответ. $(-1;\ 8)$, $(-8;\ 1)$.

Пример 5. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+\sin x=2y+\sin y \\ x+y=\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

Решение. Выразив y через x из второго уравнения, подставим $\frac{\pi}{2}-x$ вместо y в первое уравнение. Получим систему

$$\begin{cases} 2x+\sin x=2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ y=\frac{\pi}{2}-x, \end{cases} \quad (12)$$

равносильную системе (11).

Решим первое уравнение системы (12). Рассмотрим функцию $f(u)=2u+\sin u$. Она определена на множестве $\boldsymbol{R}$ и возрастает на нем, так как ее производная $f'(u)=2+\cos u$ положительна на $\boldsymbol{R}$. Следовательно, первое уравнение системы (12) равносильно (см. п. 35) уравнению $x=\frac{\pi}{2}-x$, имеющему единственный корень $x_1=\frac{\pi}{4}$.

Из второго уравнения системы (12) найдем значение $y_1 = \frac{\pi}{4}$.

Система (12), а значит, и равносильная ей система (11) имеют единственное решение $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

49*. Рассуждения с числовыми значениями при решении систем уравнений

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^{\log_x y + 2} = x^{-1} \\ 1 + \log_x\left(1 - \frac{4y}{x}\right) = \log_x 3. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Если пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение системы (1), то справедливы числовые равенства

$$y_0^{\log_{x_0} y_0 + 2} = x_0^{-1}, \ 1 + \log_{x_0}\left(1 - \frac{4y_0}{x_0}\right) = \log_{x_0} 3. \tag{2}$$

Из справедливости этих равенств следует, что имеют смысл все числовые выражения, входящие в них. Но это означает, что числа x_0 и y_0 удовлетворяют условиям

$$x_0 > 0, \ x_0 \neq 1, \ y_0 > 0, \ x_0 > 4y_0. \tag{3}$$

При условиях (3) равенства (2) можно записать в виде

$$x_0^{\log_{x_0} y_0 (\log_{x_0} y_0 + 2)} = x_0^{-1}, \ \log_{x_0}(x_0 - 4y_0) = \log_{x_0} 3. \tag{4}$$

Так как число x_0 удовлетворяет условиям (3), то из равенств (4) следует справедливость равенств

$$(\log_{x_0} y_0)^2 + 2\log_{x_0} y_0 + 1 = 0, \tag{5}$$

$$x_0 - 4y_0 = 3. \tag{6}$$

Из справедливости равенства (5) следует справедливость равенства $\log_{x_0} y_0 = -1$, т. е. справедливость равенства

$$y_0 = \frac{1}{x_0}. \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что каждое решение системы (1) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x - 4y = 3, \end{cases} \tag{8}$$

т. е. система (8) является следствием системы (1). Система (8) имеет два решения: $\left(4;\ \frac{1}{4}\right)$ и $(-1;\ -1)$. Проверка показывает, что пара $\left(4;\ \frac{1}{4}\right)$ удовлетворяет системе (1), а пара $(-1;\ -1)$ нет. Следовательно, система (1) имеет единственное решение $\left(4;\ \frac{1}{4}\right)$.

Ответ. $\left(4;\ \frac{1}{4}\right)$.

Рассуждения с числовыми значениями можно применять и при решении одного уравнения с несколькими неизвестными.

Пример 2. Решим уравнение

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}=\frac{4}{(y-3)^2+2}. \tag{9}$$

Решение. Если пара чисел $(x_0;\ y_0)$ — решение уравнения (9), то справедливо числовое равенство

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi x_0}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{4}=\frac{4}{(y_0-3)^2+2}. \tag{10}$$

Равенство (10) означает, что существуют числа $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x_0}{4}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{4}$, причем $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x_0}{4}=a>0$, $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{4}=\frac{1}{a}$. Применяя неравенство $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, справедливое для любого положительного a, получим, что справедливо неравенство $\operatorname{tg}^2\frac{\pi y_0}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi y_0}{4}\geqslant 2$, причем $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x_0}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{4}=2$, лишь если $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x_0}{4}=1$.

Для любого числа y_0 справедливо неравенство $\frac{4}{(y_0-3)^2+2}\leqslant 2$, причем $\frac{4}{(y_0-3)^2+2}=2$ лишь при $y_0=3$. Это означает, что пара чисел $(x_0;\ y_0)$ является решением системы

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}=2\\ \frac{4}{(y-3)^2+2}=2.\end{cases} \tag{11}$$

Система (11) имеет решения $(x_n;\ y_0)$, где $x_n=1+2n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $y_0=3$. Проверка показывает, что любая такая пара удовлетворяет уравнению (9), т. е. является решением уравнения (9).

Ответ. $(1+2n;\ 3)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

50*. Уравнения, неравенства, системы с параметром

Пример 1. Для каждого значения параметра a решим уравнение

$$2|x|+\frac{1}{2|x|}=a. \qquad (1)$$

Решение. Все корни уравнения (1) содержатся в множестве M всех $x \neq 0$. Для каждого $x \in M$ имеем $2|x|+\frac{1}{2|x|} \geqslant 2$. Поэтому для любого $a<2$ уравнение (1) не имеет решений.

При $a=2$ уравнение (1) имеет два корня: $x_1=-0,5$ и $x_2=0,5$.

При $a>2$ уравнение (1) равносильно на множестве M уравнению

$$4x^2-2a|x|+1=0. \qquad (2)$$

Обозначим $t=|x|$, тогда уравнение (2) перепишется в виде $4t^2-2at+1=0$. При $a>2$ оно имеет два корня: $t_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{4}$ и $t_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{4}$. Так как при $a>2$ числа t_1 и t_2 положительны, то уравнение (1) имеет четыре корня: $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{4}$, $x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{4}$, $x_3=-\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{4}$, $x_4=-\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{4}$.

Ответ. Нет корней при $a<2$; $-0,5$ и $0,5$ при $a=2$; $\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{4}$, $\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{4}$, $-\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{4}$, $-\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{4}$ при $a>2$.

Пример 2. Для каждого значения параметра a решим неравенство

$$\ln(x-a)+\sqrt{2a-x} \geqslant \sqrt{x-1}+\ln(x-a). \qquad (3)$$

Решение. При любом a неравенство (3) равносильно системе

$$\begin{cases} x-a>0 \\ 2a-x \geqslant x-1 \\ x-1 \geqslant 0, \end{cases}$$

которую можно переписать в виде

$$\begin{cases} x>a \\ x \leqslant a+0,5 \\ x \geqslant 1. \end{cases} \qquad (4)$$

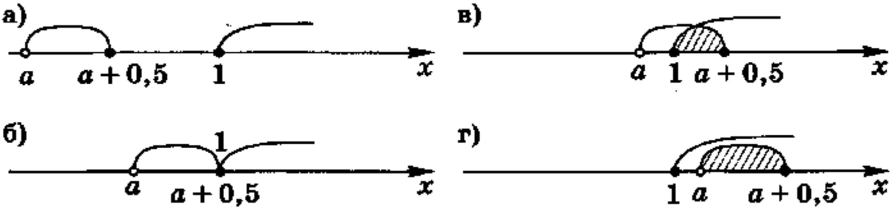

Рис. 54

Двум первым неравенствам системы (4) удовлетворяют только все $x \in (a;\ a+0,5]$.

1) Если $a+0,5<1$, т. е. если $a<0,5$, то система (4) не имеет решений (рис. 54, *а*).

2) Если $a+0,5=1$, т. е. если $a=0,5$, то система (4) имеет единственное решение $x=1$ (рис. 54, *б*).

3) Если $a+0,5>1$ и $a<1$, т. е. если $0,5<a<1$, то решения системы (4) составляют промежуток $[1;\ a+0,5]$ (рис. 54, *в*).

4) Если $a \geqslant 1$, то решения системы (4) составляют промежуток $(a;\ a+0,5]$ (рис. 54, *г*).

Ответ. Нет решений при $a<0,5$; 1 при $a=0,5$; $[1;\ a+0,5]$ при $0,5<a<1$; $(a;\ a+0,5]$ при $a \geqslant 1$.

Пример 3. Для каждого значения параметра a решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -a^2-1 \\ \sin y \cos x = a. \end{cases} \qquad (5)$$

Решение. Складывая и вычитая уравнения системы, получим, что она равносильна системе

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -a^2+a-1 \\ \sin(x-y) = -a^2-a-1. \end{cases} \qquad (6)$$

Так как $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ для любого α, то система (6) имеет решения только для тех a, для которых справедливы неравенства

$$-1 \leqslant -a^2+a-1 \leqslant 1 \text{ и } -1 \leqslant -a^2-a-1 \leqslant 1. \qquad (7)$$

Неравенства (7) справедливы лишь при $a=0$. Следовательно, при каждом $a \neq 0$ система (6) и равносильная ей система (5) решений не имеют.

При $a=0$ система (6) имеет вид

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -1 \\ \sin(x-y) = -1. \end{cases} \qquad (8)$$

Система (8) имеет решения $x=-\frac{\pi}{2}+(k+n)\pi$, $y=(k-n)\pi$, $k\in Z$, $n\in Z$.

Следовательно, система (5), равносильная системе (6), при $a=0$ имеет те же решения.

Ответ. Нет решений при $a\neq 0$; $x=-\frac{\pi}{2}+(k+n)\pi$, $y=(k-n)\pi$, $k\in Z$, $n\in Z$ при $a=0$.

Пример 4. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3-x}=a-x \qquad (9)$$

имеет единственный корень.

Решение. Функция $f(x)=\sqrt{3-x}$ определена для всех $x\leqslant 3$. Ее график изображен на рисунке 55 жирной линией.

Для каждого значения a график функции $g(x)=a-x$ — прямая, параллельная прямой $y=-x$.

При $a=3$ прямая $y=3-x$ пересекает график функции $f(x)$ в двух точках (3; 0) и (2; 1), т. е. при $a=3$ уравнение (9) имеет два корня. При каждом $a<3$ прямая $y=a-x$ пересекает график функции $f(x)$ в единственной точке. Следовательно, при $a<3$ уравнение (10) имеет единственный корень.

При каждом $a>3$ прямая $y=a-x$ либо пересекает график функции $f(x)$ в двух точках, либо касается этого графика, либо не пересекает его. Ясно, что при том значении a, при котором прямая касается этого графика, уравнение (9) имеет единственный корень. Найдем это значение a.

Так как $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$, то $f'(x)=-1$ при $x_0=2\frac{3}{4}$, x_0 — абсцисса точки касания. Вычислим ее ординату:

$$y_0=\sqrt{3-2\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Прямая $y=a-x$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ при условии, что $y_0=a-x_0$, т. е. при $a=3{,}25$.

Итак, уравнение (9) имеет единственный корень при $a\in(-\infty; 3)\cup\{3{,}25\}$.

Ответ. При $a\in(-\infty; 3)\cup\{3{,}25\}$.

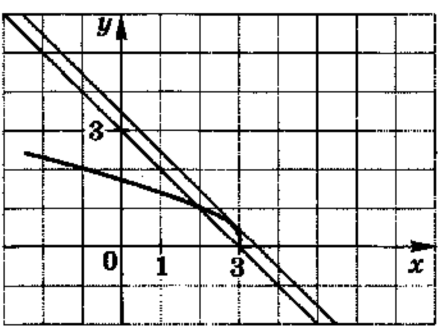

Рис. 55

РАЗДЕЛ II

Самостоятельные работы

С-1* Сложная функция

I вариант

1. Вычислите значение функции:

   а) $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$ при $x=\pi$; б) $f(x)=\log_3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}\right)$ при $x=3$;

   в) $f(x)=(\log_2\sqrt[3]{x})^5$ при $x=8$; г) $f(x)=\cos(\sin\sqrt{x})$ при $x=4\pi^2$.

2. Выпишите основные элементарные функции $f(x)$ и $g(x)$, с помощью которых задана сложная функция $f(g(x))=\sqrt{\cos x}$.

3. Даны элементарные функции: $f(x)=2^x$, $\varphi(x)=x^4$, $g(x)=\cos x$. Запишите сложную функцию:

   а) $f(\varphi(x))$; б) $\varphi(f(x))$; в) $f(g(\varphi(x)))$.

4. Решите уравнение:

   а) $f(f(x))=0$, если $f(x)=\sin x$;

   б) $f(g(x))=0$, если $f(x)=\lg x$, $g(x)=\cos x$.

II вариант

1. Вычислите значение функции:

   а) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} 3x}$ при $x=\pi$; б) $f(x)=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ при $x=6$;

   в) $f(x)=(\log_3\sqrt{x})^4$ при $x=81$;

   г) $f(x)=\sin(\cos\sqrt{x})$ при $x=\frac{\pi^2}{4}$.

2. Выпишите основные элементарные функции $f(x)$ и $g(x)$, с помощью которых задана сложная функция $f(g(x))=(\sin x)^{10}$.

3. Даны элементарные функции: $g(x)=\sqrt[3]{x}$, $\varphi(x)=5^x$, $f(x)=\sin x$. Запишите сложную функцию:

   а) $f(\varphi(x))$; б) $\varphi(f(x))$; в) $f(g(\varphi(x)))$.

4. Решите уравнение:

   а) $f(f(x))=1$, если $f(x)=\cos x$;

   б) $f(g(x))=0$, если $f(x)=\lg x$, $g(x)=\sin x$.

III вариант

1. Вычислите значение функции:

а) $y=\sqrt{2\lg x}$ при $x=100$;

б) $f(x)=\log_3\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}\right)$ при $x=3$;

в) $y=\sin(7^{\sin x}\cdot\pi)$ при $x=\pi$;

г) $f(x)=\sqrt[3]{\log_2(2\operatorname{tg}x)}$ при $x=\frac{\pi}{4}$.

2. Выпишите основные элементарные функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$, с помощью которых задана сложная функция $f(g(\varphi(x)))=\log_2(\sin x^3)$.

3. Даны элементарные функции: $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $\varphi(x)=10^x$, $g(x)=\operatorname{tg}x$. Запишите сложную функцию:

а) $f(\varphi(x))$; б) $\varphi(f(x))$; в) $f(g(\varphi(x)))$.

4. Решите уравнение:

а) $f(g(x))=0$, если $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$;

б) $f(g(x))=0$, если $f(x)=\ln x$, $g(x)=\operatorname{tg}x$.

IV вариант

1. Вычислите значение функции:

а) $f(x)=\sqrt{3\lg x}$ при $x=1000$;

б) $f(x)=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ при $x=4$;

в) $f(x)=\cos(8^{\operatorname{tg}x}\cdot\pi)$ при $x=\pi$;

г) $f(x)=\sqrt[5]{\log_3(3\operatorname{ctg}x)}$ при $x=\frac{\pi}{4}$.

2. Выпишите основные элементарные функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$, с помощью которых задана сложная функция $f(g(\varphi(x)))=e^{\cos\sqrt{x}}$.

3. Даны элементарные функции: $f(x)=3^x$, $\varphi(x)=x^5$, $g(x)=\operatorname{ctg}x$. Запишите сложную функцию:

а) $f(\varphi(x))$; б) $\varphi(f(x))$; в) $f(g(\varphi(x)))$.

4. Решите уравнение:

а) $f(g(x))=1$, если $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$;

б) $f(g(x))=0$, если $f(x)=\ln x$, $g(x)=\operatorname{ctg}x$.

С-2 Область определения функции

I вариант

Найдите $D(f)$ — область определения функции (1—4):

1. $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$. 2. $f(x)=\log_3\frac{4-x^2}{x-1}$.

3. $f(x)=\frac{\sqrt{25-x^2}}{\log_{21}(x+3)}$. 4. $f(x)=\sqrt{-x^2-x+2}+\log_4(\sin x)$.

II вариант

Найдите $D(f)$ — область определения функции (1—4):

1. $f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$. 2. $f(x)=\log_4\frac{9-x^2}{x-2}$.

3. $f(x)=\frac{\sqrt{36-x^2}}{\log_{22}(x+5)}$. 4. $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}+\log_5(\cos x)$.

III вариант

Найдите $D(f)$ — область определения функции (1—4):

1. $f(x)=\sqrt{3x^2+2x-8}$. 2. $f(x)=\log_{0,4}\frac{x^2-14x+40}{2-x}$.

3. $f(x)=\frac{\sqrt{49-x^2}}{\log_{31}(x+4)}$. 4. $f(x)=\sqrt{\cos x}+\log_{47}(-x^2+3x-2)$.

IV вариант

Найдите $D(f)$ — область определения функции (1—4):

1. $f(x)=\sqrt{2x^2+3x-2}$. 2. $f(x)=\log_3\frac{x^2-14x+45}{3-x}$.

3. $f(x)=\frac{\sqrt{64-x^2}}{\log_{32}(x+6)}$. 4. $f(x)=\sqrt{\cos x}+\log_{48}(-x^2-3x-2)$.

С-3 Область изменения функции

I вариант

Найдите $E(f)$ — область изменения функции (1—4):

1. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+8}$. 2. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-1;\ \sqrt{5}]$.

3. $f(x)=3\sin x+4\cos x$. 4. $f(x)=x^2-4x+6+\frac{1}{x^2-4x+5}$.

II вариант

Найдите $E(f)$ — область изменения функции (1—4):

1. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+10}$. 2. $f(x)=\sqrt{16-x^2}$, $x\in[-2;\ \sqrt{7}]$.

3. $f(x)=4\sin x-3\cos x$. 4. $f(x)=x^2+6x+11+\frac{1}{x^2+6x+10}$.

III вариант

Найдите $E(f)$ — область изменения функции (1—4):

1. $f(x)=\sqrt{x^2+8x+20}$. 2. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{36-x^2}}$, $x\in[-1;\ \sqrt{11}]$.

3. $f(x)=9\sin x-12\cos x$. 4. $f(x)=x^2-8x+16+\dfrac{1}{x^2-8x+17}$.

IV вариант

Найдите $E(f)$ — область изменения функции (1—4):

1. $f(x)=\sqrt{x^2-8x+25}$. 2. $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{25-x^2}}$, $x\in[-2;\ \sqrt{21}]$.

3. $f(x)=12\sin x+9\cos x$.

4. $f(x)=x^2+12x+35+\dfrac{1}{x^2+12x+36}$.

С-4 Четные и нечетные функции

I вариант

1. Докажите, что функция $f(x)=3x^4+6x^2-7$ четная.
2. Докажите, что функция $f(x)=6x^7+7x^3$ нечетная.
3. Исследуйте на четность функцию:

   а) $f(x)=3x^6-5x^4-9$; б) $f(x)=\sin x+x^{2007}$;

   в) $f(x)=\dfrac{13}{(x-21)(x+21)}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x-10}+\dfrac{1}{x+20}$.

4. Докажите, что функция $y=(|3x|-3x)(|x|+x)$ является и четной, и нечетной.

II вариант

1. Докажите, что функция $f(x)=4x^4-5x^2+6$ четная.
2. Докажите, что функция $f(x)=5x^9-6x$ нечетная.
3. Исследуйте на четность функцию:

   а) $f(x)=8x^5+10x^3-x$; б) $f(x)=\cos x+x^{2008}$;

   в) $f(x)=\dfrac{23}{(x-22)(x+22)}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x+10}+\dfrac{1}{x-20}$.

4. Докажите, что функция $y=(|2x|+2x)(|x|-x)$ является и четной, и нечетной.

III вариант

1. Докажите, что функция $f(x)=5x^6+4x^4-3$ четная.
2. Докажите, что функция $f(x)=4x^5+5x^7$ нечетная.
3. Исследуйте на четность функцию:

   а) $f(x)=13x^8-3x^4-11$;   б) $f(x)=\sin 4x+4x^{2009}$;

   в) $f(x)=\dfrac{13x}{(x-23)(x+23)}$;   г) $f(x)=\dfrac{1}{x-100}-\dfrac{1}{x+200}$.
4. Докажите, что функция $y=(\sqrt{4x^2}-2x)(|x|+x)$ является и четной, и нечетной.

IV вариант

1. Докажите, что функция $f(x)=6x^8-3x^4+1$ четная.
2. Докажите, что функция $f(x)=3x^3-5x^9$ нечетная.
3. Исследуйте на четность функцию:

   а) $f(x)=7x^7+4x^5+x$;   б) $f(x)=\cos 5x+5x^{2006}$;

   в) $f(x)=\dfrac{12x}{(x-24)(x+24)}$;   г) $f(x)=\dfrac{1}{x+100}-\dfrac{1}{x-200}$.
4. Докажите, что функция $y=(\sqrt{9x^2}+3x)(|x|-x)$ является и четной, и нечетной.

С-5* Задачи с параметром. Использование четности функции

I вариант

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (1—4):

1. $x^4-ax^2+12a-3a^2=0$ имеет ровно три корня.
2. $\dfrac{ax-2}{x+3a}+\dfrac{ax+2}{x-3a}=\dfrac{1}{3}$ имеет единственный корень.
3. $x^2-(4a+2)|x|+3a^2+6a=0$ имеет ровно четыре корня.
4. $3\cdot 9^{|x|}-(1-9a)\cdot 3^{|x|}-3a=0$ имеет ровно два корня.

II вариант

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (1—4):

1. $x^4-2ax^2+6a-3a^2=0$ имеет ровно три корня.

2. $\frac{ax-3}{x+2a}+\frac{ax+3}{x-2a}=\frac{1}{2}$ имеет единственный корень.

3. $x^2-(5a+1)|x|+4a^2-4a=0$ имеет ровно четыре корня.

4. $2\cdot 4^{|x|}-(1-8a)\cdot 2^{|x|}-4a=0$ имеет ровно два корня.

III вариант

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (1—4):

1. $x^4-5ax^2+10a-2a^2=0$ имеет ровно три корня.

2. $\frac{x-4a}{ax-2}+\frac{x+4a}{ax+2}=2$ имеет единственный корень.

3. $x^2-(a+1)|x|-2a^2-a=0$ имеет ровно четыре корня.

4. $2\cdot 4^{|x|}-(1+8a)\cdot 2^{|x|}+4a=0$ имеет ровно два корня.

IV вариант

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (1—4):

1. $x^4-6ax^2+12a-2a^2=0$ имеет ровно три корня.

2. $\frac{x-6a}{ax-2}+\frac{x+6a}{ax+2}=3$ имеет единственный корень.

3. $x^2-(2a+1)|x|-3a^2-a=0$ имеет ровно четыре корня.

4. $3\cdot 9^{|x|}-(1+9a)\cdot 3^{|x|}+3a=0$ имеет ровно два корня.

С-6 Промежутки монотонности функции. Промежутки знакопостоянства функции

I вариант

1. Определите по графику функции $y=f(x)$ ее промежутки:
   а) монотонности; б) знакопостоянства (рис. 56).

2. Докажите, что функция:
   а) $f(x)=-x^2+8x$ убывает на промежутке $X=[4; +\infty)$;
   б) $g(x)=\frac{-2}{x-3}+4$ возрастает на промежутке $X=(3; +\infty)$.

3. Определите промежутки знакопостоянства функции:
   а) $f(x)=\frac{x}{5}+1$;
   б) $f(x)=\frac{(x-4)(x+3)}{(x-2)(x+1)}$.

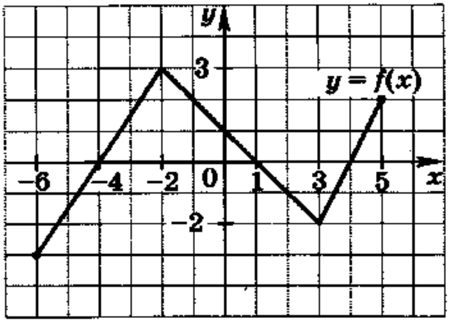

Рис. 56

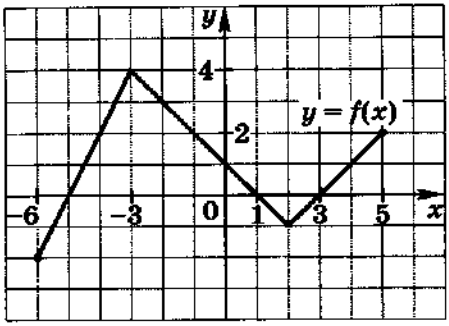

Рис. 57

II вариант

1. Определите по графику функции $y = f(x)$ ее промежутки: а) монотонности; б) знакопостоянства (рис. 57).

2. Докажите, что функция:

а) $f(x) = x^2 - 10x$ возрастает на промежутке $X = [5; +\infty)$;

б) $g(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$ убывает на промежутке $X = (2; +\infty)$.

3. Определите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{5} - 1$; б) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}$.

III вариант

1. Определите по графику функции $y = f(x)$ ее промежутки: а) монотонности; б) знакопостоянства (рис. 58).

2. Докажите, что функция:

а) $f(x) = x^2 - 2x$ убывает на промежутке $X = (-\infty; 1]$;

б) $g(x) = \sqrt{x-9}$ возрастает на промежутке $X = [9; +\infty)$.

3. Определите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = \dfrac{9}{x} - 3$;

б) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-5)}{(x+2)^2}$.

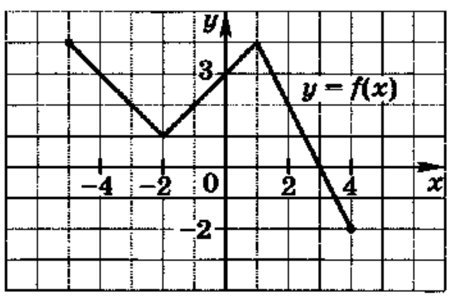

Рис. 58

IV вариант

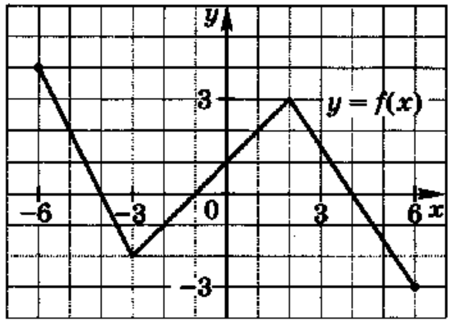

Рис. 59

1. Определите по графику функции $y=f(x)$ ее промежутки:
   а) монотонности;
   б) знакопостоянства (рис. 59).
2. Докажите, что функция:
   а) $f(x)=-x^2+4x$ возрастает на промежутке $X=(-\infty;\ 2]$;
   б) $g(x)=\sqrt{16-x}$ убывает на промежутке $X=(-\infty;\ 16)$.
3. Определите промежутки знакопостоянства функции:
   а) $f(x)=\frac{12}{x}-4$; б) $f(x)=\frac{(x+7)(x-5)}{(x-3)^2}$.

С-7 Построение графиков функций

I вариант

Постройте график функции (1—2):

1. а) $y=2^{x+3}$; б) $y=-2^{x+3}$;
   в) $y=\sqrt{-x}-2$; г) $y=\sqrt{-x-2}$.
2. а) $y=\sin 2x$; б) $y=3\sin 2x$;
   в) $y=\sqrt{25-x^2}$; г) $y=\sqrt{24-x^2-2x}$.

II вариант

Постройте график функции (1—2):

1. а) $y=3^{x+2}$; б) $y=-3^{x+2}$;
   в) $y=\sqrt{-x}+3$; г) $y=\sqrt{-x+3}$.
2. а) $y=\sin 3x$; б) $y=2\sin 3x$;
   в) $y=\sqrt{16-x^2}$; г) $y=\sqrt{7-x^2+6x}$.

III вариант

Постройте график функции (1—2):

1. а) $y=\sqrt{x-3}$; б) $y=-\sqrt{x-3}$;
   в) $y=\log_2(-x)+1$; г) $y=\log_2(-x+1)$.
2. а) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$; б) $y=2\cos^2 x-2\sin^2 x$;
   в) $y=\sqrt{9-x^2}$; г) $y=\sqrt{-x^2-6x}-3$.

IV вариант

Постройте график функции (1—2):

1. а) $y=\sqrt{x+2}$; б) $y=-\sqrt{x+2}$;
   в) $y=\log_3(-x)-2$; г) $y=\log_3(-x-2)$.
2. а) $y=2\sin x\cos x$; б) $y=6\sin x\cos x$;
   в) $y=\sqrt{4-x^2}$; г) $y=\sqrt{-x^2-4x}-2$.

С-8* Графики функций, содержащих модули

I вариант

Постройте график функции (1—2):

1. а) $y=\left|\dfrac{2}{x-3}+2\right|$; б) $y=\dfrac{2}{|x|-3}+2$; в) $y=\left|\dfrac{2}{|x|-3}+2\right|$.
2. а) $y=\dfrac{x|x^2-4|}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{3|x^2-9|}{x(x^2-9)}$; в) $y=\dfrac{x^2(2^x-2)}{|2^x-2|}$.

II вариант

Постройте график функции (1—2):

1. а) $y=\left|\dfrac{3}{x-2}+3\right|$; б) $y=\dfrac{3}{|x|-2}+3$; в) $y=\left|\dfrac{3}{|x|-2}+3\right|$.
2. а) $y=\dfrac{x|x^2-9|}{x^2-9}$; б) $y=\dfrac{2|x^2-4|}{x(x^2-4)}$; в) $y=\dfrac{x^2(3^x-3)}{|3^x-3|}$.

III вариант

Постройте график функции (1—2):

1. а) $y=\left|\dfrac{4}{x-4}+1\right|$; б) $y=\dfrac{4}{|x|-4}+1$; в) $y=\left|\dfrac{4}{|x|-4}+1\right|$.
2. а) $y=\dfrac{4x|x^2-4|}{4-x^2}$; б) $y=\dfrac{3|x^2-9|}{x(9-x^2)}$; в) $y=\dfrac{x^2\left(3^x-\frac{1}{3}\right)}{\left|3^x-\frac{1}{3}\right|}$.

IV вариант

Постройте график функции (1—2):

1. а) $y=\left|\dfrac{3}{x-3}+3\right|$; б) $y=\dfrac{3}{|x|-3}+3$; в) $y=\left|\dfrac{3}{|x|-3}+3\right|$.
2. а) $y=\dfrac{x|x^2-9|}{2(9-x^2)}$; б) $y=\dfrac{6|x^2-4|}{x(4-x^2)}$; в) $y=\dfrac{x^2\left(2^x-\frac{1}{2}\right)}{\left|2^x-\frac{1}{2}\right|}$.

С-9* Задачи с параметром. Использование графиков функций

I вариант

Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение (1—3):

1. $\frac{x^3-4x^2-x}{|x|}=b$ имеет ровно три корня.

2. $x^2+3x-|x^2+x-2|=b$ имеет ровно два корня.

3. $\sqrt{4-(x-b)^2}=3+b$ имеет единственный корень.

II вариант

Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение (1—3):

1. $\frac{x^3+4x^2+x}{|x|}=b$ имеет ровно три корня.

2. $x^2-3x-|x^2-x-2|=b$ имеет ровно два корня.

3. $\sqrt{16-(x+b)^2}=2+b$ имеет единственный корень.

III вариант

Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение (1—3):

1. $\frac{x^3+6x^2+3x}{|x|}=b$ имеет ровно два корня.

2. $x^2-2x-|x^2-4x+3|=b$ имеет ровно три корня.

3. $\sqrt{25-(x-b)^2}=4-b$ имеет единственный корень.

IV вариант

Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение (1—3):

1. $\frac{x^3-8x^2+2x}{|x|}=b$ имеет ровно два корня.

2. $x^2+2x-|x^2+4x+3|=b$ имеет ровно три корня.

3. $\sqrt{36-(x+b)^2}=5-b$ имеет единственный корень.

С-10 Предел функции

I вариант

Вычислите предел (1—4):

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{40}{3x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-10}{3+x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-11x+28}{3x^2+8x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-11x+22}{2x^3+5x-11}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3-7x}{x^2+8x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-27}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 15x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$.

II вариант

Вычислите предел (1—4):

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{99}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\dfrac{50}{7x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+13}{1+x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+7}{10x^2+7x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+12x+21}{3x^2-6x+13}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x^2}{10x^4+x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-8}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 12x}{\operatorname{tg} 4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

III вариант

Вычислите предел (1—4):

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-101}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{740}{11x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+11}{5+2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2-12x+2}{12x^2+7x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+12x+19}{5x^3-4x-17}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3+5x}{3x-2x^2}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-2x-15}{x^3+27}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 28x}{14x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}8x}{\sin 16x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}$.

IV вариант

Вычислите предел (1—4):

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-98}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{470}{13x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-17}{7+2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2-9x+11}{18x^2-3x-17}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^3-13x+23}{4x^2+15x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2}{10x^4+7x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-7x+6}{x^2+5x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4x-12}{x^3+8}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 15x}{30x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x}{\operatorname{tg}3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

С-11 Обратные функции

I вариант

Найдите функцию $y=g(x)$, обратную к данной функции $y=f(x)$ (1—3):

1. а) $f(x)=3x+6,\ x\in[-4;\ 0]$;

б) $f(x)=\frac{2}{x+1}-3,\ x\in(-1;\ +\infty)$.

2. а) $f(x)=(x-3)^2+1,\ x\in[3;\ +\infty)$;

б) $f(x)=3+\sqrt{x+2},\ x\in[-2;\ +\infty)$.

3. а) $f(x)=3^{x-1}$; б) $f(x)=\log_2(x+3)$.

II вариант

Найдите функцию $y=g(x)$, обратную к данной функции $y=f(x)$ (1—3):

1. а) $f(x)=2x+4,\ x\in[-4;\ 0]$;

б) $f(x)=\frac{2}{x-3}+1,\ x\in(3;\ +\infty)$.

2. а) $f(x)=(x-1)^2+2,\ x\in[1;\ +\infty)$;

б) $f(x)=2+\sqrt{x+1},\ x\in[-1;\ +\infty)$.

3. а) $f(x)=2^{x-2}$; б) $f(x)=\log_3(x+2)$.

III вариант

Найдите функцию $y=g(x)$, обратную к данной функции $y=f(x)$ (1—3):

1. а) $f(x)=3x-6,\ x\in[0;\ 3]$; б) $f(x)=\dfrac{4}{x-2}+3,\ x\in(2;\ +\infty)$.

2. а) $f(x)=(x+2)^2-1,\ x\in[-2;\ +\infty)$;

б) $f(x)=1+\sqrt{x-4},\ x\in[4;\ +\infty)$.

3. а) $f(x)=3^{x-4}$; б) $f(x)=\log_4(x+1)$.

IV вариант

Найдите функцию $y=g(x)$, обратную к данной функции $y=f(x)$ (1—3):

1. а) $f(x)=2x-4,\ x\in[0;\ 4]$; б) $f(x)=\dfrac{4}{x+3}-2,\ x\in(-3;\ +\infty)$.

2. а) $f(x)=(x+1)^2-2,\ x\in[-1;\ +\infty)$;

б) $f(x)=1+\sqrt{x-3},\ x\in[3;\ +\infty)$.

3. а) $f(x)=4^{x-3}$; б) $f(x)=\log_3(x+1)$.

С-12 Производные элементарных функций

I вариант

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)=4x-5$.
2. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(-1)$, если $f(x)=x^3-3x^2+5x+3$.
3. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(0)$, если $f(x)=e^x\cdot\cos x$.
4. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(4)$, если $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-3}$.
5. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(16)$, если $f(x)=\sqrt[4]{x}$.

II вариант

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)=5x-9$.
2. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(-1)$, если $f(x)=x^3+2x^2-5x+1$.
3. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(0)$, если $f(x)=e^x\cdot\sin x$.

4. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(0)$, если $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.

5. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(64)$, если $f(x)=\sqrt[6]{x}$.

III вариант

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)=x^2+4x-6$.
2. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(2)$, если $f(x)=2x^3-x^2+4x-2$.
3. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(1)$, если $f(x)=2^x\cdot\log_2 x$.
4. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(0)$, если $f(x)=\frac{x^2-5}{x^2-1}$.
5. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(7)$, если $f(x)=\sqrt[8]{x}$.

IV вариант

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)=x^2-6x+4$.
2. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(-2)$, если $f(x)=2x^3+x^2-3x+3$.
3. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(1)$, если $f(x)=3^x\cdot\log_3 x$.
4. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(3)$, если $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2-4}$.
5. Найдите: а) $f'(x)$; б) $f'(5)$, если $f(x)=\sqrt[10]{x}$.

С-13 Производная сложной функции

I вариант

Найдите производную функции (1—4):

1. $y=(3x-8)^{10}$.
2. а) $y=\sin(2x-1)$; б) $y=\cos(3x+4)$;
   в) $y=\operatorname{tg}(4x-2)$; г) $y=\operatorname{ctg}(5x+5)$.
3. а) $y=e^{3x+4}$; б) $y=4^{6x-1}$;
   в) $y=\log_6(9x+4)$; г) $y=\ln(2x-5)$.
4. $y=\sqrt[5]{x}$.

II вариант

Найдите производную функции (1—4):

1. $y=(4x-11)^{11}$.
2. а) $y=\sin(3x+2)$; б) $y=\cos(2x-3)$;
   в) $y=\operatorname{tg}(5x+6)$; г) $y=\operatorname{ctg}(4x-3)$.

3. а) $y=e^{4x-5}$; б) $y=3^{5x+2}$;
в) $y=\log_7(8x-3)$; г) $y=\ln(3x+4)$.

4. $y=\sqrt[7]{x}$.

III вариант

Найдите производную функции (1—4):

1. $y=(5x+14)^{12}$.

2. а) $y=\sin(4x-3)$; б) $y=\cos(5x+6)$;
в) $y=\mathrm{tg}(3x-5)$; г) $y=\mathrm{ctg}(2x+3)$.

3. а) $y=e^{5x+6}$; б) $y=6^{4x-3}$;
в) $y=\log_8(7x+2)$; г) $y=\ln(4x-3)$.

4. $y=\sqrt[5]{x^2}$.

IV вариант

Найдите производную функции (1—4):

1. $y=(6x+17)^{13}$.

2. а) $y=\sin(5x+4)$; б) $y=\cos(4x-5)$;
в) $y=\mathrm{tg}(2x+6)$; г) $y=\mathrm{ctg}(3x-4)$.

3. а) $y=e^{6x-7}$; б) $y=7^{3x+4}$;
в) $y=\log_9(6x-1)$; г) $y=\ln(5x+2)$.

4. $y=\sqrt[7]{x^2}$.

С-14* Производная сложной функции (продолжение)

I вариант

1. Найдите $f'(1)$, если $f(x)=\sqrt{-x^2+6x+11}$.

2. Найдите $f'(0)$, если $f(x)=(5-x)\cdot\sqrt{4+2x}$.

3. Найдите $f'(5)$, если $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$.

II вариант

1. Найдите $f'(3)$, если $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-2}$.

2. Найдите $f'(1)$, если $f(x)=(3-2x)\cdot\sqrt{5-x}$.

3. Найдите $f'(5)$, если $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x-3}$.

III вариант

1. Найдите $f'(0)$, если $f(x)=\sqrt{-5x^2+10x+4}$.

2. Найдите $f'(3)$, если $f(x)=(4-x^2)\cdot\sqrt{x^2-5}$.

3. Найдите $f'(0)$, если $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+6x+4}}{x^2-3x+1}$.

IV вариант

1. Найдите $f'(2)$, если $f(x)=\sqrt{-3x^2+6x+4}$.

2. Найдите $f'(1)$, если $f(x)=(1+x^2)\cdot\sqrt{5-x^2}$.

3. Найдите $f'(0)$, если $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+9}}{x^2+5x+1}$.

С-15 Максимум и минимум функции на отрезке

I вариант

1. Дана функция $f(x)=x^3-9x^2-21x-7$. Найдите:

а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 3]$;
б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

2. Дана функция $f(x)=2x-3\sqrt[3]{x^2}$. Найдите:

а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$;
б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^5+2x^3+2x-10$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

4. Дана функция $f(x)=x^3-3x^2+3x+a$. Найдите значение параметра a, при котором наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 2]$ равно 5.

II вариант

1. Дана функция $f(x)=x^3+6x^2-15x-22$. Найдите:

а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$;
б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

2. Дана функция $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$. Найдите:

а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-8;\ 1]$;
б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-8;\ 1]$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^5+2x^3+3x-11$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

4. Дана функция $f(x)=x^3+3x^2+3x+a$. Найдите значение параметра a, при котором наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 1]$ равно 6.

III вариант

1. Дана функция $f(x)=x^3+9x^2+15x-5$. Найдите:

   а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 3]$;
   б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

2. Дана функция $f(x)=2x-6\sqrt[3]{x}$. Найдите:

   а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$;
   б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 8]$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^5+3x^3+3x-12$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

4. Дана функция $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$. Найдите значение параметра a, при котором наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 3]$ равно 7.

IV вариант

1. Дана функция $f(x)=x^3+12x^2+21x-10$. Найдите:

   а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 1]$;
   б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 1]$.

2. Дана функция $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$. Найдите:

   а) критические точки функции $f(x)$ на отрезке $[-8;\ 1]$;
   б) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-8;\ 1]$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^5+4x^3+3x-13$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

4. Дана функция $f(x)=x^3+6x^2-15x+a$. Найдите значение параметра a, при котором наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$ равно 8.

С-16 Уравнение касательной к графику функции

I вариант

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0, если:

   а) $f(x)=x^2-6x+5,\ x_0=2$;

б) $f(x)=\ln x,\ x_0=e$;

в) $f(x)=3^x,\ x_0=1$.

2. Дана функция $f(x)=x^3+3x^2-2x-2$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной прямой $y=-2x+1$.

3. Дана функция $f(x)=x^2-2x-1$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящей через точку $A(0;\ -5)$.

4. Даны функции $f(x)=-x^2+2x-3$ и $g(x)=x^2+2$. Напишите уравнение общей касательной к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

II вариант

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0, если:

а) $f(x)=x^2+6x-7,\ x_0=-2$; б) $f(x)=\log_3 x,\ x_0=1$;

в) $f(x)=e^x,\ x_0=2$.

2. Дана функция $f(x)=x^3-3x^2-3x+5$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной прямой $y=-3x+4$.

3. Дана функция $f(x)=x^2+2x-2$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящей через точку $A(0;\ -6)$.

4. Даны функции $f(x)=x^2+2x+4$ и $g(x)=-x^2-1$. Напишите уравнение общей касательной к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

III вариант

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0, если:

а) $f(x)=3x^2+6x+7,\ x_0=-2$; б) $f(x)=\lg x,\ x_0=10$;

в) $f(x)=2^x,\ x_0=1$.

2. Дана функция $f(x)=x^3+6x^2+7x-2$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной прямой $y=-2x+7$.

3. Дана функция $f(x)=x^2+4x+2$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящей через точку $A(-1;\ -5)$.

4. Даны функции $f(x)=-x^2+6x-11$ и $g(x)=x^2-4x+6$. Напишите уравнение общей касательной к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

IV вариант

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0, если:

   а) $f(x)=3x^2-6x+5$, $x_0=2$; б) $f(x)=\log_2 x$, $x_0=4$;

   в) $f(x)=10^x$, $x_0=0$.

2. Дана функция $f(x)=x^3-6x^2+6x-3$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной прямой $y=-3x+11$.

3. Дана функция $f(x)=x^2-4x+3$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящей через точку $A(1; -4)$.

4. Даны функции $f(x)=-x^2-2x-3$ и $g(x)=x^2+4x+6$. Напишите уравнение общей касательной к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

С-17 Приближенные вычисления

I вариант

1. Вычислите приближенное значение $f(x_0+\Delta x)$ функции $f(x)$, если:

   а) $f(x)=x^3$, $x_0=2$, $\Delta x=0{,}01$;

   б) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25$, $\Delta x=-0{,}04$.

2. Вычислите приближенно: а) $\sqrt{9{,}06}$; б) $\sqrt[3]{7{,}94}$.

3. Вычислите приближенно $\sin 32°$.

II вариант

1. Вычислите приближенное значение $f(x_0+\Delta x)$ функции $f(x)$, если:

   а) $f(x)=x^4$, $x_0=2$, $\Delta x=0{,}01$;

   б) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=36$, $\Delta x=-0{,}06$.

2. Вычислите приближенно: а) $\sqrt{8{,}94}$; б) $\sqrt[3]{8{,}06}$.

3. Вычислите приближенно $\cos 58°$.

III вариант

1. Вычислите приближенное значение $f(x_0+\Delta x)$ функции $f(x)$, если:

   а) $f(x)=x^6$, $x_0=2$, $\Delta x=0{,}01$;

   б) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=49$, $\Delta x=-0{,}06$.

2. Вычислите приближенно: а) $\sqrt{15{,}84}$; б) $\sqrt[3]{27{,}09}$.

3. Вычислите приближенно $\sin 28°$.

IV вариант

1. Вычислите приближенное значение $f(x_0+\Delta x)$ функции $f(x)$, если:

   а) $f(x)=x^5,\ x_0=2,\ \Delta x=0{,}01$;

   б) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=64,\ \Delta x=-0{,}06$.

2. Вычислите приближенно: а) $\sqrt{25{,}42}$; б) $\sqrt[3]{26{,}91}$.

3. Вычислите приближенно $\cos 62°$.

С-18 Исследование функций с помощью производной

I вариант

1. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию:

   а) $f(x)=(x-1)^2(x+2)$; б) $f(x)=4\sqrt{x}-x$;

   в) $f(x)=x^2-18\ln x$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$.

3. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $f(x)=x^3-6x^2+11x-12$.

II вариант

1. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию:

   а) $f(x)=(x+1)^2(x-2)$; б) $f(x)=x-9\sqrt{x}$;

   в) $f(x)=32\ln x-x^2$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$.

3. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $f(x)=x^3+9x^2-12x+11$.

III вариант

1. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию:

   а) $f(x)=(x-2)^2(x+1)$; б) $f(x)=27\sqrt[3]{x}-x$;

   в) $f(x)=\dfrac{x^2}{12}-6\ln x$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+4}$.

3. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $f(x)=x^4-6x^2+19x-21$.

IV вариант

1. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию:
   а) $f(x)=(x+2)^2(x-1)$; б) $f(x)=x-12\sqrt[3]{x}$;
   в) $f(x)=5\ln x-\dfrac{x^2}{10}$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+9}$.
3. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $f(x)=x^4-24x^2+21x-19$.

С-19 Задачи на максимум и минимум

I вариант

1. Число 84 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма квадратов слагаемых была наименьшей.
2. Число 27 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы отношение первого числа ко второму было равно 1 : 2, а произведение всех трех чисел было наибольшим.
3. Произведение трех последовательных членов геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем равно 27. Найдите наибольшую сумму этих трех членов среди всех прогрессий, обладающих указанными свойствами.

II вариант

1. Число 68 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма квадратов слагаемых была наименьшей.
2. Число 54 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы отношение первого числа ко второму было равно 1 : 3, а произведение всех трех чисел было наибольшим.
3. Произведение трех последовательных членов геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем равно 64. Найдите наибольшую сумму этих трех членов среди всех прогрессий, обладающих указанными свойствами.

III вариант

1. Число 56 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы сумма квадратов всех слагаемых была наименьшей, а отношение первого числа ко второму было равно $1:2$.
2. Число 45 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы отношение первого числа ко второму было равно $3:2$, а произведение всех трех чисел было наибольшим.
3. Произведение трех последовательных членов геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем равно 125. Найдите наибольшую сумму этих трех членов среди всех прогрессий, обладающих указанными свойствами.

IV вариант

1. Число 52 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы сумма квадратов всех слагаемых была наименьшей, а отношение первого числа ко второму было равно $1:3$.
2. Число 42 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы отношение первого числа ко второму было равно $3:4$, а произведение всех трех чисел было наибольшим.
3. Произведение трех последовательных членов геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем равно 216. Найдите наибольшую сумму этих трех членов среди всех прогрессий, обладающих указанными свойствами.

С-20* Геометрические задачи на максимум и минимум

I вариант

1. В пирамиде $SABC$ ребра SA и BC образуют угол $30°$, $SA=6$, $BC=8$. Определите наибольшую площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной прямым SA и BC.
2. Дана прямоугольная система координат xOy. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(3;\ 3)$, а катеты лежат на прямых $x=0$ и $y=2$?
3. Найдите наибольший объем правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна $6\sqrt{3}$ см.

II вариант

1. В пирамиде $SABC$ ребра SA и BC образуют угол 45°, $SA=4$, $BC=6\sqrt{2}$. Найдите наибольшую площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной SA и BC.
2. Дана прямоугольная система координат xOy. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(4; 4)$, а катеты лежат на прямых $x=0$ и $y=3$?
3. Найдите наибольший объем правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна $8\sqrt{3}$ см.

III вариант

1. В пирамиде $SABC$ ребра SA и BC образуют угол 60°, $SA=6$, $BC=8\sqrt{3}$. Найдите наибольшую площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной SA и BC.
2. Дана прямоугольная система координат xOy. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(2; 3)$, а катеты лежат на прямых $x=-1$ и $y=2$?
3. Найдите наибольший объем цилиндра, диагональ осевого сечения которого равна $6\sqrt{3}$ см.

IV вариант

1. В пирамиде $SABC$ ребра SA и BC образуют угол 60°, $SA=4$, $BC=6\sqrt{3}$. Найдите наибольшую площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной SA и BC.
2. Дана прямоугольная система координат xOy. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(3; 4)$, а катеты лежат на прямых $x=-1$ и $y=3$?
3. Найдите наибольший объем цилиндра, диагональ осевого сечения которого равна $8\sqrt{3}$ см.

С-21* Задачи на смеси (на максимум и минимум)

I вариант

1. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 20% меди и 80% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марган-

ца. Из них получили новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание меди может быть в этом сплаве?

2. В два сосуда налиты различные растворы соли, причем в первый сосуд налито 160 кг, а во второй — 40 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. Определите наибольшее количество испарившейся воды из обоих сосудов вместе, если известно, что $pq=9$.

II вариант

1. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 90% золота и 10% платины, второй — 30% серебра и 70% платины, третий — по 40% серебра и платины и 20% золота. Из них получили новый сплав, содержащий 20% платины. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание серебра может быть в новом сплаве?

2. В два сосуда налиты различные растворы соли, причем в первый сосуд налито 200 кг, а во второй — 50 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. Определите наибольшее количество испарившейся воды из обоих сосудов вместе, если известно, что $pq=16$.

III вариант

1. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% меди и 70% цинка, второй — 40% олова и 60% меди, третий — 10% цинка, 20% олова и 70% меди. Из них получили новый сплав, содержащий 50% меди. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание олова может быть в этом сплаве?

2. В два сосуда налиты различные растворы соли, причем в первый сосуд налито 64 кг, а во второй — 16 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. Определите наибольшее количество испарившейся воды из обоих сосудов вместе, если известно, что $pq=9$.

IV вариант

1. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 10% золота, 40% серебра и 50% меди, второй — 20% серебра и 80% меди, третий — 20% золота, 30% серебра и 50% меди. Из них получили новый сплав, содержащий 5% золота. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание серебра может быть в новом сплаве?

2. В два сосуда налиты различные растворы соли, причем в первый сосуд налито 81 кг, а во второй — 36 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. Определите наибольшее количество испарившейся воды из обоих сосудов вместе, если известно, что $pq=16$.

С-22 Исследование функции с помощью производной и построение ее графика

I вариант

Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график (1—3):

1. $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-2)^2$.
2. $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1}$.
3. $f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x+1}$.

II вариант

Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график (1—3):

1. $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2(x-2)$.
2. $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+1}$.
3. $f(x)=\frac{x^2-2x-8}{x-1}$.

III вариант

Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график (1—3):

1. $f(x)=\frac{1}{4}(x+3)(x-3)^2$.
2. $f(x)=\frac{x^2-6}{x^2+1}$.
3. $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x+1}$.

IV вариант

Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график (1—3):

1. $f(x)=\frac{1}{4}(x+3)^2(x-3)$. 2. $f(x)=\frac{x^2-5}{x^2+1}$.

3. $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-1}$.

С-23* Решение задач с помощью производной

I вариант

1. Сравните числа $2{,}7^e$ и $e^{2,7}$.
2. Определите промежуток значений x, для каждого из которых верно равенство $\arcsin 2x+\arccos 2x=\frac{\pi}{2}$.
3. Найдите все значепия параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3-3x^2-9x+a=0$ имеет ровно три корня.

II вариант

1. Сравните числа $2{,}8^e$ и $e^{2,8}$.
2. Определите промежуток значений x, для каждого из которых верно равенство $\arcsin\frac{x}{2}+\arccos\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$.
3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3+3x^2-24x+a=0$ имеет ровно три корня.

III вариант

1. Сравните числа $\pi^{\sqrt{8}}$ и $(\sqrt{8})^{\pi}$.
2. Определите промежуток значений x, для каждого из которых верно равенство $\operatorname{arctg} 2x+\operatorname{arcctg} 2x=\frac{\pi}{2}$.
3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3+3x^2-9x+a=0$ имеет единственный корень.

IV вариант

1. Сравните числа $\pi^{\sqrt{10}}$ и $(\sqrt{10})^{\pi}$.
2. Определите промежуток значений x, для каждого из которых верно равенство $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3-3x^2-24x+a=0$ имеет единственный корень.

С-24 Первообразная. Неопределенный интеграл

I вариант

1. Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, если:

   а) $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+2x-13$ и $f(x)=x^2-5x+2$ $(x\in R)$;

   б) $F(x)=\frac{1}{x^2}+5x+\sin x+2$ и $f(x)=-\frac{2}{x^3}+5+\cos x$ $(x\neq 0)$.

2. Найдите первообразную для функции $f(x)$:

   а) $f(x)=\sin x+\cos 3x-2^x$ $(x\in R)$;

   б) $f(x)=\sqrt{x}-x^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{x}$ $(x>0)$.

3. Найдите ту первообразную для функции $f(x)$, график которой проходит через точку A, если:

   а) $f(x)=4x$, $A(2;\ 17)$; б) $f(x)=\sqrt{2}\sin x$, $A\left(\frac{\pi}{4};\ 2\right)$.

4. Найдите:

   а) $\int\sqrt{2x-3}\,dx$; б) $\int\cos 3x\,dx$.

II вариант

1. Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, если:

   а) $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+4x+3$ и $f(x)=x^3-5x^2+4$ $(x\in R)$;

   б) $F(x)=\frac{1}{x}+3x+\cos x-11$ и $f(x)=-\frac{1}{x^2}+3-\sin x$ $(x\neq 0)$.

2. Найдите первообразную для функции $f(x)$:

   а) $f(x)=\sin x-\cos 2x+3^x$ $(x\in R)$;

   б) $f(x)=x^{\frac{4}{5}}-\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ $(x>0)$.

3. Найдите ту первообразную для функции $f(x)$, график которой проходит через точку A, если:

   а) $f(x)=3x^2$, $A(2;\ 33)$; б) $f(x)=\sqrt{2}\cos x$, $A\left(\frac{\pi}{4};\ 3\right)$.

4. Найдите:

а) $\int\sqrt{3x-2}\,dx$; б) $\int\cos 2x\,dx$.

III вариант

1. Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, если:

а) $F(x)=\frac{2x^5}{5}-\frac{3x^2}{2}-7x-11$ и $f(x)=2x^4-3x-7$ $(x\in\boldsymbol{R})$;

б) $F(x)=\frac{5}{x}+3x-\cos x+14$ и $f(x)=-\frac{5}{x^2}+3+\sin x$ $(x\neq 0)$.

2. Найдите первообразную для функции $f(x)$:

а) $f(x)=-\sin x-\frac{1}{\cos^2 x}+5^x$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}\right)$;

б) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}-\sqrt{3x}-\frac{2}{x}$ $(x>0)$.

3. Найдите ту первообразную для функции $f(x)$, график которой проходит через точку A, если:

а) $f(x)=4x^3$, $A(3;\ 80)$; б) $f(x)=\sin 3x$, $A\left(\frac{\pi}{3};\ -1\right)$.

4. Найдите:

а) $\int\frac{-8}{\sqrt{4x-5}}\,dx$; б) $\int(\cos 3x+\sin 2x)\,dx$.

IV вариант

1. Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, если:

а) $F(x)=\frac{3x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-9x+15$ и $f(x)=3x^3+4x^2-9$ $(x\in\boldsymbol{R})$;

б) $F(x)=\frac{3}{x^2}-5x-\sin x-10$ и $f(x)=-\frac{6}{x^3}-5-\cos x$ $(x\neq 0)$.

2. Найдите первообразную для функции $f(x)$:

а) $f(x)=\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}-6^x$ $(x\neq\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z})$;

б) $f(x)=\sqrt{2x}-x^{\frac{4}{5}}+\frac{3}{x}$ $(x>0)$.

3. Найдите ту первообразную для функции $f(x)$, график которой проходит через точку A, если:

а) $f(x)=5x^4$, $A(3;\ 127)$; б) $f(x)=\cos 2x$, $A\left(\frac{\pi}{4};\ 3\right)$.

4. Найдите:

а) $\int \frac{-10}{\sqrt{5x-4}}\,dx$; б) $\int (\cos 2x - \sin 3x)\,dx$.

С-25* Нахождение неопределенных интегралов с помощью подстановки

I вариант

Найдите (1—2):

1. а) $\int \frac{3x}{x^2+4}\,dx$; б) $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$; в) $\int \sin^5 x \cos x\,dx$.

2. а) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$; б) $\int \sqrt{1-16x^2}\,dx$; в) $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$.

II вариант

Найдите (1—2):

1. а) $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$; б) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; в) $\int \cos^4 x \sin x\,dx$.

2. а) $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$; б) $\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$; в) $\int \operatorname{ctg} 2x\,dx$.

III вариант

Найдите (1—2):

1. а) $\int \frac{x}{3x^2+4}\,dx$; б) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$; в) $\int \sin^6 x \cos x\,dx$.

2. а) $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$; б) $\int \sqrt{1-36x^2}\,dx$; в) $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$.

IV вариант

Найдите (1—2):

1. а) $\int \frac{x}{2x^2+3}\,dx$; б) $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$; в) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$.

2. а) $\int \sqrt{36-x^2}\,dx$; б) $\int \sqrt{1-25x^2}\,dx$; в) $\int \operatorname{ctg} 3x\,dx$.

С-26 Геометрический смысл определенного интеграла

I вариант

Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите (1—2):

1. а) $\int\limits_1^4 5\,dx$; б) $\int\limits_{-8}^0 \frac{x}{2}\,dx$; в) $\int\limits_1^7 (x+2)\,dx$.

2. а) $\int\limits_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^2 |2|x|-2|\,dx$.

3. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите приближенно $\int\limits_1^7 (-x^2+8x-7)\,dx$.

II вариант

Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите (1—2):

1. а) $\int\limits_1^5 4\,dx$; б) $\int\limits_{-8}^0 \frac{x}{4}\,dx$; в) $\int\limits_1^5 (x+3)\,dx$.

2. а) $\int\limits_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^0 |2|x|-4|\,dx$.

3. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите приближенно $\int\limits_{-1}^5 (-x^2+4x+5)\,dx$.

III вариант

Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите (1—2):

1. а) $\int\limits_2^7 3\,dx$; б) $\int\limits_{-6}^0 \frac{2x}{3}\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^4 (-x+5)\,dx$.

2. а) $\int\limits_{-5}^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^5 |2|x-2|-4|\,dx$.

3. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите приближенно $\int\limits_0^4 (x^2-4x+5)\,dx$.

IV вариант

Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите (1—2):

1. а) $\int\limits_2^8 2\,dx$; б) $\int\limits_{-8}^0 \frac{3x}{4}\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^5 (-x+6)\,dx$.

2. а) $\int\limits_{-6}^6 \sqrt{36-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^5 |2|x-2|-2|\,dx$.

3. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите приближенно $\int\limits_0^2 (x^2-2x+3)\,dx$.

С-27 Формула Ньютона—Лейбница

I вариант

1. Вычислите с помощью формулы Ньютона—Лейбница определенный интеграл:

а) $\int\limits_2^5 (x^2+x+1)\,dx$; б) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; в) $\int\limits_1^e \frac{2\,dx}{x}$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=4+x^2$, $y=2-x$, $x=-1$ и $x=1$;

б) $y=x^3$, $y=1$ и $x=2$; в) $y=9-x^2$ и $y=3-x$.

II вариант

1. Вычислите с помощью формулы Ньютона—Лейбница определенный интеграл:

а) $\int\limits_2^4 (x^2-x+1)\,dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; в) $\int\limits_1^e \frac{3\,dx}{x}$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=4-x^2$, $y=x+5$, $x=-1$ и $x=1$;

б) $y=x^3$, $y=8$ и $x=1$; в) $y=x^2+1$ и $y=7-x$.

III вариант

1. Вычислите с помощью формулы Ньютона—Лейбница определенный интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^3 (x^2+x+3)\,dx$; б) $\int\limits_0^\pi \cos x\,dx$; в) $\int\limits_1^e \frac{dx}{2x}$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=5-x^2$ и $y=x+3$; б) $y=-x^2-4x+5$ и $y=5$;

в) $y=2x^2-4x+2$ и $y=2-x$.

IV вариант

1. Вычислите с помощью формулы Ньютона—Лейбница определенный интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{4}(x^2-x+4)\,dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$; в) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{3x}$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x^2+1$ и $y=3-x$; б) $y=x^2-4x+6$ и $y=6$;
в) $y=2x^2+4x+2$ и $y=x+2$.

С-28 Свойства определенного интеграла

I вариант

Вычислите (1—2):

1. а) $\int\limits_{1}^{2}x^3\,dx+\int\limits_{2}^{3}x^3\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{2}\cos x\,dx+\int\limits_{2}^{\pi}\cos x\,dx$.

2. а) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin 9x\cos 8x\,dx-\int\limits_{0}^{\pi}\sin 8x\cos 9x\,dx$;
б) $\int\limits_{2}^{4}(x^3+\lg x)\,dx-\int\limits_{2}^{4}(2x+\lg x)\,dx$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x^2-2x-2$ и $y=x-2$; б) $y=x^3-3x^2$ и $y=x^2-4x$.

II вариант

Вычислите (1—2):

1. а) $\int\limits_{1}^{2}x^2\,dx+\int\limits_{2}^{3}x^2\,dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{3}\sin x\,dx+\int\limits_{3}^{\pi}\sin x\,dx$.

2. а) $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cos 8x\cos 7x\,dx+\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 8x\sin 7x\,dx$;
б) $\int\limits_{1}^{3}(2x^2+\lg x)\,dx-\int\limits_{1}^{3}(3x+\lg x)\,dx$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x^2+2x-2$ и $y=-x-2$; б) $y=x^3+7x^2$ и $y=x^2-9x$.

III вариант

Вычислите (1—2):

1. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}x^5\,dx+\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}x^5\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{3}\cos x\,dx+\int\limits_{3}^{\pi}\cos x\,dx$.

2. а) $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin 8x \cos 7x\, dx - \int\limits_{-\pi}^{0} \sin 7x \cos 8x\, dx$;

б) $\int\limits_{1}^{3} (x^3 - \lg 8x)\, dx - \int\limits_{1}^{3} (x - \lg 8x)\, dx$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y = -x^2 - 4x$ и $y = x$; б) $y = x^3 - 4x^2$ и $y = 2x^2 - 9x$.

IV вариант

Вычислите (1—2):

1. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{5}} x^3\, dx + \int\limits_{\sqrt{5}}^{3} x^3\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \sin x\, dx + \int\limits_{1}^{\pi} \sin x\, dx$.

2. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 9x \cos 8x\, dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 9x \sin 8x\, dx$;

б) $\int\limits_{1}^{4} (2x^2 + \lg 9x)\, dx - \int\limits_{1}^{4} (3x + \lg 9x)\, dx$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y = -x^2 + 4x$ и $y = -x$; б) $y = x^3 + 5x^2$ и $y = x^2 - 4x$.

С-29 Равносильные преобразования уравнений

I вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\sqrt[3]{9 - x^3} = 3 - x$. **2.** $(5x - 7)^9 = (3x + 11)^9$.

3. $7^{5x^2 - 9} = 7^{3x + 5}$. **4.** $\sqrt[5]{\sin x + 4^x - 1} = \sqrt[5]{\sin x + 2^{x+1} + 7}$.

5. $4^{x+3} = 11^x$. **6.** $(\sin 2x + 6^{x+1})^{15} = (\sin x + 6^{x+1})^{15}$.

II вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\sqrt[3]{x^3 + 9} = 3 + x$. **2.** $(6x - 5)^{11} = (4x + 13)^{11}$.

3. $6^{4x^2 - 5} = 6^{5x + 1}$. **4.** $\sqrt[7]{\cos x + 9^x - 2} = \sqrt[7]{\cos x - 3^{x+1} + 16}$.

5. $3^{x+2} = 7^x$. **6.** $(\sin 2x + 7^{x+2})^{13} = (\cos x + 7^{x+2})^{13}$.

III вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\sqrt[3]{x^2-6x-x^3}=1-x$.
2. $(7x+5)^{13}=(5x-7)^{13}$.
3. $5^{6x^2-x}=5^{5x+12}$.
4. $\sqrt[9]{5^x+4^x-20}=\sqrt[9]{5^x+2^{x+2}+12}$.
5. $5^{x-1}=2^x$.
6. $(\cos 2x+4^{x+2})^{11}=(\cos^2 x-\sin x+4^{x+2})^{11}$.

IV вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\sqrt[3]{x^2+6x+x^3}=1+x$.
2. $(5x+6)^{15}=(3x-8)^{15}$.
3. $4^{5x^2-x}=4^{4x+10}$.
4. $\sqrt[11]{4^x+9^x-40}=\sqrt[11]{4^x+3^{x+1}+14}$.
5. $7^{x-1}=4^x$.
6. $(\cos 2x+5^{x-3})^9=(\cos^2 x+\sin x+5^{x-3})^9$.

С-30 Равносильные преобразования неравенств

I вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x+8}<1+x$.
2. $(x-3)^{11}>(x^2-4x+3)^{11}$.
3. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2-x}<\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-2}$.
4. $3^{\cos^2 x}>3^{\sin^2 x+0,5}$.

II вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x+5}>1+x$.
2. $(x+3)^9<(x^2-5x+11)^9$.
3. $\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}>\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3}$.
4. $4^{\cos^2 x}<4^{\sin^2 x-0,5}$.

III вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\sqrt[3]{x^3-2x^2+6x+3}<1+x$.
2. $(2x-1)^7>(x^2-6x+11)^7$.
3. $\left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}<\left(\frac{5}{6}\right)^{4x-5}$.
4. $6^{\cos 2x}>6^{\cos^2 x+\sin x}$.

IV вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\sqrt[3]{x^3-2x^2+4x+5}>1+x$.

2. $(2x+1)^5<(x^2-7x+15)^5$.

3. $\left(\frac{6}{7}\right)^{4-x}>\left(\frac{6}{7}\right)^{5x-2}$.

4. $5^{\cos 2x}<5^{\cos^2 x-\sin x}$.

С-31 Уравнения-следствия

I вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{x+3}=x+1$.
2. $\sqrt[4]{x^2-5x}=\sqrt[4]{2x^2-4x-6}$.
3. $|\sin x|=\sin x\cos x$.
4. $\lg(x^4-x^2-6)=\lg(x^4+4x-11)$.
5. $x^2+x+\sqrt[6]{x-1}=\sqrt[6]{x-1}+12$.

II вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{x-2}=x-4$.
2. $\sqrt[6]{x^2-4x}=\sqrt[6]{2x^2-5x-6}$.
3. $|\cos x|=\sin x\cos x$.
4. $\lg(x^4-x^2-3)=\lg(x^4+3x-7)$.
5. $x^2-x+\sqrt[6]{x-2}=\sqrt[6]{x-2}+20$.

III вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{2x+5}=5-x$.
2. $\sqrt[8]{x^2+2x}=\sqrt[8]{2x^2-x-4}$.
3. $|\sin x|=-\sin x\cos x$.
4. $\lg(x^4+x^2-22)=\lg(x^4-2x-14)$.
5. $x^2-3x+\lg(x+1)=\lg(x+1)+10$.

IV вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{2x+3}=6-x$.
2. $\sqrt[10]{x^2-2x}=\sqrt[10]{2x^2+x-4}$.
3. $|\cos x|=-\sin x\cos x$.
4. $\lg(x^4+x^2-21)=\lg(x^4-6x-5)$.
5. $x^2+3x+\lg(x+2)=\lg(x+2)+18$.

С-32 Уравнения-следствия (продолжение)

I вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\frac{x^2-x}{x-2}=\frac{2}{x-2}$.
2. $3^{\log_3(x+4)}=x^2+2x-26$.

3. $\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\sqrt{3}\cos x.$ 4. $\log_3(x+5)=2\log_3(x-1).$

5. $\log_2(x^3+8)=\log_2(x+2)+2\log_2(4-x).$

6. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=\sqrt{6x+7}.$

7. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{a-3}{ax+2}=5.$

II вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{2}{x+2}.$ 2. $3^{\log_3(x+5)}=x^2-x-19.$

3. $\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\sqrt{2}\cos x.$ 4. $\log_3(x+3)=2\log_3(x-3).$

5. $\log_7(2x^3-9)=\log_7(2x+3)+2\log_7(3-x).$

6. $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+7}.$

7. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{a-4}{ax+3}=2.$

III вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{-4x}{x+1}.$ 2. $2^{\log_2(5-x)}=x^2-14x+35.$

3. $\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\sin^2 x.$ 4. $\log_5(2x+5)=2\log_5(x-5).$

5. $\log_3(7x+32)=\log_3(x+2)+2\log_3(x-4).$

6. $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x+13}.$

7. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{a-5}{ax+4}=3.$

IV вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{-3x}{x-1}.$ 2. $2^{\log_2(6-x)}=x^2-14x+42.$

3. $\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\sin^2 x.$ 4. $\log_5(2x+7)=2\log_5(x-4).$

5. $\log_{11}(27-4x)=\log_{11}(2x+3)+2\log_{11}(x-3)$.

6. $\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+4}=\sqrt{6x+18}$.

7. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{a-5}{ax+6}=1$.

С-33 Решение уравнений с помощью систем

I вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{2x}=1-x$.
2. $\sqrt{8-10\cos x}=2\sin x$.
3. $\sqrt[6]{2x^2-2}=\sqrt[6]{4x-1}$.
4. $\lg\sin 2x=\lg\cos x$.
5. $x^2+x+\lg\sin x=1+\lg\sin x$.

II вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{2x+2}=1-x$.
2. $\sqrt{8+10\cos x}=2\sin x$.
3. $\sqrt[4]{2x^2-1}=\sqrt[4]{6x-4}$.
4. $\lg\sin 2x=\lg\sin x$.
5. $x^2-x+\lg\cos x=1+\lg\cos x$.

III вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{2x-2}=2-x$.
2. $\sqrt{8-10\sin x}=-2\cos x$.
3. $\sqrt[10]{4x^2-1}=\sqrt[10]{-8x-2}$.
4. $\lg\cos 2x=\lg\cos x$.
5. $x^2-3x+\lg\cos x=\lg\cos x-1$.

IV вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{5-2x}=2-x$.
2. $\sqrt{8+10\sin x}=-2\cos x$.
3. $\sqrt[8]{4x^2-3}=\sqrt[8]{2-4x}$.
4. $\lg\cos 2x=\lg(-\cos x)$.
5. $x^2-5x+\lg\sin x=\lg\sin x-5$.

С-34 Решение уравнений с помощью систем (продолжение)

I вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\log_5(x-1)\cdot\sqrt{-x^2+2x+3}=0.$

2. $(x^2-5x+4)\cdot\sqrt{\sin x}=0.$

3. $\dfrac{x^2-5}{\cos\pi x+1}=\dfrac{1-5x}{\cos\pi x+1}.$

4. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{-x^2+x+2}}=0.$

5. $\lg\left(\dfrac{x^2-5}{x+4}\right)=\lg\left(\dfrac{1-x}{x+4}\right).$

6. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x^2-7x+a}=x-3.$

II вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\log_5(1-x)\cdot\sqrt{-x^2+x+6}=0.$

2. $(x^2-2x-3)\cdot\sqrt{\sin x}=0.$

3. $\dfrac{x^2-4x}{\cos\pi x-1}=\dfrac{6+x}{\cos\pi x-1}.$

4. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{-x^2-x+2}}=0.$

5. $\lg\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)=\lg\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right).$

6. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x^2+5x-a}=x+3.$

III вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\log_5(x-2)\cdot\sqrt{-x^2+4x+5}=0.$

2. $(x^2-x-2)\cdot\sqrt{\cos x}=0.$

3. $\dfrac{2x^2+x}{\sin\pi x-1}=\dfrac{2-2x}{\sin\pi x-1}.$

4. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{-x^2+x+12}}=0.$

5. $\lg\left(\dfrac{x^2-3}{x+2}\right)=\lg\left(\dfrac{3x+1}{x+2}\right).$

6. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x^2-8x+3a}=x-1.$

IV вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\log_5(2-x)\cdot\sqrt{-x^2+2x+8}=0.$

2. $(x^2+x-2)\cdot\sqrt{\cos x}=0.$

3. $\frac{2x^2+x}{\sin\pi x+1}=\frac{2+4x}{\sin\pi x+1}$.

4. $\frac{\sin x}{\sqrt{-x^2-x+12}}=0$.

5. $\lg\left(\frac{x^2-6}{x+8}\right)=\lg\left(\frac{1-6x}{x+8}\right)$.

6. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x^2+5x-4a}=x+1$.

С-35* Уравнения вида $f(\alpha(x))=f(\beta(x))$

I вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\arcsin(x^2-35{,}5)=\arcsin(x-5{,}5)$.
2. $\log_5(x^2-3)+7^{x^2-3}=\log_5(9x+7)+7^{9x+7}$.
3. $\operatorname{arcctg}(3x^2-7x)=\operatorname{arcctg}(x+3)$.
4. $-\sqrt[3]{x^2-50x}+(0{,}3)^{x^2-50x}=-\sqrt[3]{49x-98}+(0{,}3)^{49x-98}$.
5. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x-2}+\sqrt{2x-1}$.

II вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\arccos(x^2-24{,}5)=\arccos(x-4{,}5)$.
2. $\log_7(x^2-5)+6^{x^2-5}=\log_7(5-9x)+6^{5-9x}$.
3. $\operatorname{arctg}(3x^2+9x)=\operatorname{arctg}(x+3)$.
4. $-\sqrt[5]{x^2-48x}+(0{,}4)^{x^2-48x}=-\sqrt[5]{50x+99}+(0{,}4)^{50x+99}$.
5. $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x-4}+\sqrt{2x-5}$.

III вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\arcsin(x^2-x-5{,}5)=\arcsin(x+2{,}5)$.
2. $\log_4(x^2-4)+\sqrt{x^2-4}=\log_4(3x+6)+\sqrt{3x+6}$.
3. $\operatorname{arcctg}(2x^2-2x)=\operatorname{arcctg}(x+2)$.
4. $-\sqrt[7]{x^2-50x}+(0{,}5)^{x^2-50x}=-\sqrt[7]{49x+100}+(0{,}5)^{49x+100}$.
5. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{3x-7}+\sqrt{3x-6}+\sqrt{3x-5}$.

IV вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\arccos(x^2+3x-3{,}5)=\arccos(x+4{,}5)$.
2. $\log_6(x^2-16)+\sqrt{x^2-16}=\log_6(x-4)+\sqrt{x-4}$.
3. $\operatorname{arctg}(2x^2+4x)=\operatorname{arctg}(x+2)$.
4. $-\sqrt[9]{x^2-48x}+(0{,}6)^{x^2-48x}=-\sqrt[9]{52x-99}+(0{,}6)^{52x-99}$.
5. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x-3}$.

С-36 Решение неравенств с помощью систем

I вариант

Решите неравенство (1—5):

1. $\sqrt{2x+3}<x$.
2. $\sqrt{3x-2}>2x-1$.
3. $\sqrt[4]{x^2-3}<\sqrt[4]{x+3}$.
4. $\log_2(x^3-x+10)>\log_2(x^3+5x^2-6x)$.
5. $x^2-6x+\sqrt{\sin x}<2x-12+\sqrt{\sin x}$.

II вариант

Решите неравенство (1—5):

1. $\sqrt{3x-2}<x$.
2. $\sqrt{3x+4}>2x+3$.
3. $\sqrt[6]{x^2-2}<\sqrt[6]{4-x}$.
4. $\log_3(x^3-x+24)>\log_3(x^3+4x^2-5x)$.
5. $x^2+x+\sqrt{\cos x}<3x+3+\sqrt{\cos x}$.

III вариант

Решите неравенство (1—5):

1. $\sqrt{5x-1}<x+1$.
2. $\sqrt{3x+3}>2x-1$.
3. $\sqrt[6]{16-x^2}<\sqrt[6]{10-x}$.
4. $\log_{0,2}(x^3-x+12)<\log_{0,2}(x^3+2x^2-3x)$.
5. $x^2-4x+\sqrt{-\sin x}<2x-5+\sqrt{-\sin x}$.

IV вариант

Решите неравенство (1—5):

1. $\sqrt{2x+6}<x-1$.
2. $\sqrt{2x+5}>2x-1$.
3. $\sqrt[8]{16-x^2}<\sqrt[8]{2x+13}$.
4. $\log_{0,3}(x^3-7x+18)<\log_{0,3}(x^3+3x^2-4x)$.
5. $x^2-2x+\sqrt{-\cos x}<x+4+\sqrt{-\cos x}$.

I вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $(x-3)\log_2(x^2-6x+9)<0.$

2. $\dfrac{\lg x}{x^2-2x}>0.$

3. $(\sqrt{47x^2+2}-\sqrt{46x^2+38})\log_{0,3}3x>0.$

4. $\sqrt[6]{2-x}<\sqrt[6]{\sqrt{x}+2x}.$

5. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{5-2x}<\sqrt{x-a}.$

II вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $(x-4)\log_2(x^2-8x+16)>0.$

2. $\dfrac{\lg x}{x^2-3x+2}<0.$

3. $(\sqrt{26x^2+1}-\sqrt{25x^2+17})\lg\dfrac{x}{5}<0.$

4. $\sqrt[4]{3-x}<\sqrt[4]{\sqrt{x}+x}.$

5. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{5-x}<\sqrt{2x-a}.$

III вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $(x^2-36)\log_{0,2}(x^2-12x+36)<0.$

2. $\dfrac{\sin x}{x^2+3x}>0.$

3. $(\sqrt{56x^2+3}-\sqrt{55x^2+12})\lg\dfrac{x}{4}<0.$

4. $\sqrt[8]{x+2}<\sqrt[8]{\sqrt{-x}-2x}.$

5. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{7-2x}<\sqrt{x-a}.$

IV вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $(x^2-25)\log_{0,5}(x^2-10x+25)>0.$

2. $\dfrac{\sin x}{x^2-3x}<0.$

3. $(\sqrt{38x^2+1}-\sqrt{37x^2+26})\log_{0,4}2x>0.$

4. $\sqrt[6]{x+3}<\sqrt[6]{\sqrt{-x}-x}.$

5. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{7-x}<\sqrt{2x-a}.$

С-38* Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$

I вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\arccos\frac{3x-1}{5} > \arccos\frac{x-1}{5}$.

2. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x+6}<\sqrt{x+8}+\sqrt{x+9}$.

3. $\sqrt[3]{x+1}+\log_2(x+1)>\sqrt[3]{5-x}+\log_2(5-x)$.

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7}-\sqrt[5]{3x-7}>\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}-\sqrt[5]{2x+1}$.

II вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\arcsin\frac{3x-2}{4} > \arcsin\frac{x+1}{4}$.

2. $\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x+6}<\sqrt{2x+14}+\sqrt{2x+13}$.

3. $\log_{0,2}(x+2)-\sqrt[3]{x+2}>\log_{0,2}(3x)-\sqrt[3]{3x}$.

4. $5^{2x-5}+\sqrt[3]{2x-5}>5^{4x+1}+\sqrt[3]{4x+1}$.

III вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\arccos\frac{4x-1}{3} > \arccos\frac{2x+1}{3}$.

2. $\sqrt{5x+9}+\sqrt{10x+18}<\sqrt{4x+13}+\sqrt{8x+26}$.

3. $\sqrt[3]{x+5}+\log_3(x+5)>\sqrt[4]{7-x}+\log_3(7-x)$.

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-1}-\sqrt[5]{5x-1}>\left(\frac{3}{4}\right)^{2x+2}-\sqrt[5]{2x+2}$.

IV вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\arcsin\frac{2x-3}{5} > \arcsin\frac{4x+1}{5}$.

2. $\sqrt{3x+5}+\sqrt{9x+15}<\sqrt{2x+6}+\sqrt{6x+18}$.

3. $\log_{0,3}4x-\sqrt[5]{4x}>\log_{0,3}(5-x)-\sqrt[5]{5-x}$.

4. $6^{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}>6^{5x-3}+\sqrt[3]{5x-3}$.

С-39 Равносильность уравнений на множествах

I вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\sqrt{x}=\sqrt[3]{3x-2}$.

2. $1-\sin x=|1+\sqrt{3}\cos x|$.

3. $\dfrac{\cos^2 2x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\dfrac{\sin^2 2x+1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

4. $\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{2}{x}+1=0$.

5. $7^{\log_7(x-1)}=x^3-2x^2-7x-1$.

6. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\sin 2x-1$.

II вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\sqrt{x}=\sqrt[3]{3-2x}$.

2. $1+\sin x=|1-\sqrt{3}\cos x|$.

3. $\dfrac{\cos^2 2x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\dfrac{\sin^2 2x+1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$.

4. $\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x}+1=0$.

5. $6^{\log_6(x-2)}=x^3-5x^2+5x-2$.

6. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=-\sin 2x-1$.

III вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\sqrt{x}=\sqrt[3]{4x-3}$.

2. $1+\cos x=|1-\sqrt{3}\sin x|$.

3. $\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 2x}=\dfrac{\sin^2 4x+1}{\sin 2x}$.

4. $\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{2}{x}+1=0$.

5. $5^{\log_5(x-2)}=x^3-6x^2+9x-2$.

6. $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=-\cos^2 x$.

IV вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\sqrt{x}=\sqrt[3]{4-3x}$.

2. $1-\cos x=|1+\sqrt{3}\sin x|$.

3. $\dfrac{\cos^2 4x}{\cos 2x}=\dfrac{\sin^2 4x+1}{\cos 2x}$.

4. $\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}+1=0$.

5. $4^{\log_4(x-1)}=x^3-6x^2+6x-1$.

6. $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos^2 x$.

С-40* Равносильность уравнений на множествах (продолжение)

I вариант

Решите уравнение (1—3):

1. $\log_x(9x^2+13)=\log_x(x^4-4x^3+4x^2+13)$.

2. $\lg(x-2)+5\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}-\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}=\dfrac{9}{\sqrt{(x-3)(x-2)}}+\lg(x-2)$.

3. $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+9}$.

4. Найдите все корни уравнения $\sin 2x-\sqrt{2}(\cos x-\sin x)=1$, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\dfrac{ax}{x-3}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$.

II вариант

Решите уравнение (1—3):

1. $\log_x(9x^2+11)=\log_x(x^4-8x^3+16x^2+11)$.

2. $\lg(x-5)+4\sqrt{\dfrac{x-5}{x-6}}-\sqrt{\dfrac{x-6}{x-5}}=\dfrac{7}{\sqrt{(x-5)(x-6)}}+\lg(x-5)$.

3. $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$.

4. Найдите все корни уравнения $\sin 2x+\sqrt{2}(\cos x-\sin x)=1$, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ \pi)$.

5. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\dfrac{ax}{x+3}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2}{x^2+4x+3}$.

III вариант

Решите уравнение (1—3):

1. $\log_x(4x^2+3)=\log_x(x^4-6x^3+9x^2+3)$.

2. $\lg(x-4)+4\sqrt{\dfrac{x-5}{x-3}}-\sqrt{\dfrac{x-3}{x-5}}=\dfrac{1}{\sqrt{(x-5)(x-3)}}+\lg(x-4)$.

3. $\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x+17}$.

4. Найдите все корни уравнения $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x+\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{ax}{2x+1}+\frac{x}{x+2}=\frac{6}{2x^2+5x+2}$.

IV вариант

Решите уравнение (1—3):

1. $\log_x(16x^2+17)=\log_x(x^4-10x^3+25x^2+17)$.

2. $\lg(x-2)+5\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}=\frac{2}{\sqrt{(x-3)(x-1)}}+\lg(x-2)$.

3. $\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{6x+7}$.

4. Найдите все корни уравнения $\sin 2x+\sqrt{3}\cos x-\sin x=$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ \pi)$.

5. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{ax}{x-3}-\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x^2-4x+3}$.

С-41 Равносильность неравенств на множествах

I вариант

Решите неравенство (1—6):

1. $\sqrt{x}<\sqrt[4]{6-x}$.

2. $\sqrt{x+1}>\sqrt[3]{3x-1}$.

3. $\frac{x^2}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}<\frac{9x-18}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

4. $\frac{2\sin x}{\sqrt{2+x-x^2}}>\frac{-1}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

5. $\log_3^2 x<\frac{2}{\log_x 3}$.

6. $\sqrt{2}\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x<2\sin x$.

II вариант

Решите неравенство (1—6):

1. $\sqrt{x}<\sqrt[4]{6+x}$.

2. $\sqrt{3x+1}>\sqrt[3]{7x+1}$.

3. $\frac{x^2}{1-\cos\frac{\pi x}{2}}<\frac{8x-12}{1-\cos\frac{\pi x}{2}}$.

4. $\frac{2\cos x}{\sqrt{2-x-x^2}}>\frac{1}{\sqrt{2-x-x^2}}$.

5. $\log_4^2 x<\frac{2}{\log_x 4}$.

6. $\sqrt{2}\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x<2\cos x$.

III вариант

Решите неравенство (1—6):

1. $\sqrt{x}<\sqrt[4]{15-2x}$.

2. $\sqrt{3x+1}>\sqrt[3]{13x-1}$.

3. $\dfrac{x^2}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}<\dfrac{9x-20}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}$.

4. $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{-x^2+7x-10}}<\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+7x-10}}$.

5. $\log_3^2 x>\dfrac{3}{\log_x 3}$.

6. $-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,x>2\sin x$.

IV вариант

Решите неравенство (1—6):

1. $\sqrt{x}<\sqrt[4]{15+2x}$.

2. $\sqrt{4x+1}>\sqrt[3]{13x+1}$.

3. $\dfrac{x^2}{1+\cos\frac{\pi x}{2}}<\dfrac{9x-14}{1+\cos\frac{\pi x}{2}}$.

4. $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{-x^2+6x-8}}<\dfrac{-1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

5. $\log_4^2 x>\dfrac{3}{\log_x 4}$.

6. $-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,x>2\cos x$.

С-42* Равносильность неравенств на множествах (продолжение)

I вариант

Решите неравенство (1—2):

1. $\log_x(3x+1)>\log_x(x+2)$.
2. $\log_2(x+2)+\log_2(x+3)+\sqrt{9-x^2}<1+\sqrt{9-x^2}$.
3. Найдите все решения неравенства $|x^2-8x+8|<2x-3$, удовлетворяющие условию $x\leqslant 6$.
4. При каждом значении параметра a решите неравенство $\log_a(4-x)<2\log_a(x-2)$.

II вариант

Решите неравенство (1—2):

1. $\log_x(3x+2)<\log_x(x+3)$.
2. $\log_6(x+3)+\log_6(x+4)+\sqrt{4-x^2}<1+\sqrt{4-x^2}$.
3. Найдите все решения неравенства $|x^2-8x+3|<2x-3$, удовлетворяющие условию $x\leqslant 7$.

4. При каждом значении параметра a решите неравенство $\log_a(6-x)<2\log_a(x-4)$.

III вариант

Решите неравенство (1—2):

1. $\log_x(4x+1)>\log_x(x+3)$.
2. $\log_2(x+4)+\log_2(x+5)+\sqrt{49-4x^2}<1+\sqrt{49-4x^2}$.
3. Найдите все решения неравенства $|x^2-6x+1|<2x-1$, удовлетворяющие условию $x\leqslant 5$.
4. При каждом значении параметра a решите неравенство $\log_a(4+x)<2\log_a(2-x)$.

IV вариант

Решите неравенство (1—2):

1. $\log_x(4x-1)<\log_x(x+1)$.
2. $\log_5(x+3)+\log_5(x-1)+\sqrt{9-4x^2}<1+\sqrt{9-4x^2}$.
3. Найдите все решения неравенства $|x^2-6x-4|<2x-1$, удовлетворяющие условию $x\leqslant 6$.
4. При каждом значении параметра a решите неравенство $\log_a(2+x)<2\log_a(4-x)$.

С-43 Уравнения и неравенства с модулями

I вариант

1. Решите уравнение $|x+2|+|x-3|=7$.
2. Решите неравенство $|x-1|+|2x-6|<5$.
3. Решите уравнение $|x^2-1|+|x^2-4|=x+10$.
4. Решите неравенство $|x^2-5x-1|>|x^2+x-5|$.
5. Решите уравнение $|x^2-3{,}5x-2|+|x^2+3{,}5x-2|=2x^2-4$.

II вариант

1. Решите уравнение $|x+3|+|x-2|=7$.
2. Решите неравенство $|x-2|+|2x-8|<7$.
3. Решите уравнение $|x^2-1|+|x^2-9|=x+18$.
4. Решите неравенство $|x^2-7x-3|>|x^2+x-5|$.
5. Решите уравнение $|x^2-2{,}5x-6|+|x^2+2{,}5x-6|=2x^2-12$.

III вариант

1. Решите уравнение $|x-4|+|x+3|=9$.
2. Решите неравенство $|x+1|+|2x-2|<4$.
3. Решите уравнение $|x^2-4|+|x^2-16|=2x+20$.
4. Решите неравенство $|x^2-6x-2|>|x^2+2x-4|$.
5. Решите уравнение $|x^2-0,5x-14|+|x^2+0,5x-14|=2x^2-28$.

IV вариант

1. Решите уравнение $|x-3|+|x+4|=9$.
2. Решите неравенство $|x+3|+|2x+2|<3$.
3. Решите уравнение $|x^2-9|+|x^2-16|=2x+15$.
4. Решите неравенство $|x^2-8x-5|>|x^2+2x-3|$.
5. Решите уравнение $|x^2-1,5x-10|+|x^2+1,5x-10|=2x^2-20$.

С-44* Уравнения вида $\varphi(\varphi(x))=x$

I вариант

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=x$. 2. $\sqrt{3\sqrt{3x-2}-2}=x$.

3. $3(3x^3+2)^3=x-2$. 4. $5\sqrt[3]{5x-4}-x^3=4$.

II вариант

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{3+2\sqrt{3+2x}}=x$. 2. $\sqrt{2\sqrt{2x-1}-1}=x$.

3. $4(4x^3+3)^3=x-3$. 4. $6\sqrt[3]{6x-5}-x^3=5$.

III вариант

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{\sqrt{x+6}+6}=x$. 2. $\sqrt{4\sqrt{4x-3}-3}=x$.

3. $5(5x^3+4)^3=x-4$. 4. $8\sqrt[3]{8x-7}-x^3=7$.

IV вариант

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{\sqrt{x+12}+12}=x.$ 2. $\sqrt{5\sqrt{5x-4}-4}=x.$

3. $6(6x^3+5)^3=x-5.$ 4. $9\sqrt[3]{9x-8}-x^3=8.$

С-45 Метод интервалов для непрерывных функций

I вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\dfrac{(x^2-5x+4)(x^2+4x+5)}{(x^2+6x+5)\sqrt{36-x^2}}<0.$ 2. $\dfrac{(x^2-6x+9)(2^x-16)}{\log_5(x-1)}\geqslant 0.$

3. $3^{\sqrt{x^2-1}}\cdot(x-5)\cdot\log_5(13-x)<0.$ 4. $\dfrac{5^{\sqrt{9-x^2}}(x^2-x-2)}{x-2}\geqslant 0.$

II вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\dfrac{(x^2+5x+4)(x^2+6x+10)}{(x^2+4x-5)\sqrt{49-x^2}}>0.$ 2. $\dfrac{(x^2-4x+4)(9-3^x)}{\log_6(x+1)}\leqslant 0.$

3. $4^{\sqrt{x^2-9}}\cdot(x+5)\cdot\log_2(16-x)>0.$ 4. $\dfrac{4^{\sqrt{25-x^2}}(x^2-x-6)}{x+2}\leqslant 0.$

III вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\dfrac{(x^2-3x+2)(x^2+8x+19)}{(x^2+7x+6)\sqrt{64-x^2}}<0.$ 2. $\dfrac{(x^2-8x+16)(2^x-8)}{\log_5(x+2)}\geqslant 0.$

3. $5^{\sqrt{x^2-1}}\cdot(x-2)\cdot\log_3(11-x)<0.$ 4. $\dfrac{7^{\sqrt{36-x^2}}(x^2-2x-15)}{x+3}\leqslant 0.$

IV вариант

Решите неравенство (1—4):

1. $\dfrac{(x^2+2x-8)(x^2+12x+39)}{(x^2-3x-10)\sqrt{81-x^2}}>0.$ 2. $\dfrac{(x^2-10x+25)(100-10^x)}{\log_5(x-1)}\leqslant 0.$

3. $6^{\sqrt{x^2-9}}\cdot(x+5)\cdot\log_6(19-x)>0.$ 4. $\dfrac{3^{\sqrt{16-x^2}}(x^2-x-6)}{x-3}\geqslant 0.$

С-46* Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств

I вариант

1. Решите уравнение $\sqrt{x^2-1}+7^{\sqrt{2-2x^2}}\cdot\log_3(4-x)=x.$

2. Решите неравенство $3^{\sqrt{-2x^2+6x+8}}-\sqrt{x^2-3x-4}>x$.

Решите уравнение (3—6):

3. $\sqrt{x^2+10x-11}+\left|\log_{0,5}(x^2-2x+2)\right|=0$.

4. $\sqrt[3]{2x-5}=5-\sqrt{5x+1}$.

5. $\log_2(x-3)=4-\sqrt{x+4}$. **6.** $|x|+\frac{9}{|x|}=6\sin\frac{\pi x}{6}$.

II вариант

1. Решите уравнение $\sqrt{x^2-1}-8^{\sqrt{3-3x^2}}\cdot\log_2(3+x)=x$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x^2-2x-3}+5^{\sqrt{-2x^2+4x+6}}<x$.

Решите уравнение (3—6):

3. $\sqrt{x^2-11x-12}+\left|\log_{0,2}(x^2+2x+2)\right|=0$.

4. $\sqrt[3]{2x+4}=4-\sqrt{x+2}$.

5. $\log_3(x-2)=2-\sqrt{x+4}$. **6.** $4|x|+\frac{1}{|x|}=4\sin\frac{\pi x}{4}$.

III вариант

1. Решите уравнение $e^{\sqrt{x^2-9}}+6^{\sqrt{18-2x^2}}\cdot\log_3(6+x)=x$.

2. Решите неравенство $2^{\sqrt{-2x^2-6x+8}}-\sqrt{x^2+3x-4}>x$.

Решите уравнение (3—6):

3. $\sin^2\pi x+\ln^2(x^2-4x+5)+\sqrt{x^2+11x-26}=0$.

4. $\sqrt[3]{x+4}=6-\sqrt{3x+4}$.

5. $\log_{0,5}(x-4)=\sqrt{3x-2}-5$. **6.** $9|x|+\frac{4}{|x|}=12\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\pi x\right)$.

IV вариант

1. Решите уравнение $\pi^{\sqrt{16-x^2}}-6^{\sqrt{2x^2-32}}\cdot\log_2(36+x)=x$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x^2-4x-5}+6^{\sqrt{-2x^2+8x+10}}<x$.

Решите уравнение (3—6):

3. $\cos^2\frac{\pi x}{2}+\lg^2(x^2+6x+10)+\sqrt{x^2-6x-27}=0$.

4. $\sqrt[3]{x+3}=5-\sqrt{2x-1}$.

5. $\log_{0,5}(x-3)=\sqrt{2x+2}-6$. **6.** $16|x|+\frac{9}{|x|}=24\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\pi x\right)$.

С-47* Рассуждения с числовыми значениями при решении уравнений и неравенств

I вариант

1. Решите уравнение $\sin 6x \cos 4x = -1$.
2. Решите неравенство $3\cos 4x - 11\sin 3x \geqslant 14$.
3. Решите неравенство $|x| + \frac{1}{|x|} \leqslant \frac{6}{|x-1|+3}$.
4. Решите уравнение $\log_3|x| + \log_{|x|}3 = 2\cos 2\pi x$.

II вариант

1. Решите уравнение $\sin 3x \cos 6x = 1$.
2. Решите неравенство $5\cos 4x + 13\sin 2x \leqslant -18$.
3. Решите неравенство $\frac{|x|}{2} + \frac{2}{|x|} \leqslant \frac{10}{(x-2)^2+5}$.
4. Решите уравнение $\log_4|x| + \log_{|x|}4 = 2\sin\frac{\pi x}{8}$.

III вариант

1. Решите уравнение $\sin 3x \cos 6x = -1$.
2. Решите неравенство $7\cos 6x - 3\sin 3x \leqslant -10$.
3. Решите неравенство $|x| + \frac{1}{|x|} \leqslant \frac{8}{|x+1|+4}$.
4. Решите уравнение $\log_5|x| + \log_{|x|}5 = 2\cos 5\pi x$.

IV вариант

1. Решите уравнение $\sin 6x \cos 4x = 1$.
2. Решите неравенство $4\sin 6x - 5\cos 4x \geqslant 9$.
3. Решите неравенство $\frac{|x|}{2} + \frac{2}{|x|} \leqslant \frac{12}{(x+2)^2+6}$.
4. Решите уравнение $\log_6|x| + \log_{|x|}6 = 2\sin 3\pi x$.

С-48 Системы уравнений с несколькими неизвестными

I вариант

Решите систему уравнений (1—5):

1. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \lg(x-5) + \sqrt{y-3} = 1 \\ \lg(x-5) - \sqrt{y-3} = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases}(0{,}4)^{1+\log_{0,4}(x-2y)}=3{,}6\\ \log_3 x-2\log_3 y=-1.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1\\ 3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{xy}=11+\sqrt[3]{y^2}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}2x+\sin x=2y+\sin y\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

II вариант

Решите систему уравнений (1—5):

1. $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\lg(x+2)+\sqrt{y-1}=2\\ \lg(x+2)-\sqrt{y-1}=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}(0{,}6)^{1+\log_{0,6}(2x-y)}=2{,}4\\ 2\log_4 y-\log_4 x=1.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1\\ 4\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{xy}=9+\sqrt[3]{y^2}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}3x-\cos x=3y-\cos y\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

III вариант

Решите систему уравнений (1—5):

1. $\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\log_2(x+5)+\sqrt{y-10}=4\\ \log_2(x+5)-\sqrt{y-10}=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}(0{,}5)^{\log_{0,5}(x-y)-1}=40\\ \log_5 x-2\log_5 y=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5\\ \sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}=7+\sqrt[3]{y^2}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}3x+\cos 2x=3y+\cos 2y\\ x+y=-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

IV вариант

Решите систему уравнений (1—5):

1. $\begin{cases}x+y=\pi\\ \cos x\cos y=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\log_3(x-1)+\sqrt{y+2}=3\\ \log_3(x-1)-\sqrt{y+2}=1.\end{cases}$

3. $\begin{cases}(0{,}2)^{\log_{0,2}(y-2x)-1}=60\\ \log_2 y-2\log_2 x=2.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}=3\\ \sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{xy}=3+\sqrt[3]{y^2}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}3x-\sin 2x=3y-\sin 2y\\ x+y=-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

С-49* Рассуждения с числовыми значениями при решении систем уравнений

I вариант

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{\log_y x+1}=y^{\frac{8}{4}} \\ \log_x\left(6+\dfrac{y}{x}\right)=\log_x\dfrac{y}{x}+1. \end{cases}$

Решите уравнение (2—3):

2. $3^x+3^{-x}=2-\log_5(y^2-4y+5)$.

3. $\log_3|x|+\log_{|x|}3=4\sin\dfrac{\pi}{y^2-2y+7}$.

II вариант

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^{\log_x y}=\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{y} \\ \log_y\left(6+\dfrac{x}{y}\right)-1=\log_y\dfrac{x}{y}. \end{cases}$

Решите уравнение (2—3):

2. $2^x+2^{-x}=1+\dfrac{1}{y^2+6y+10}$.

3. $\log_4|x|+\log_{|x|}4=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{y^2+4y+8}$.

III вариант

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{\log_y x-1}=y^2 \\ \log_y\left(1-\dfrac{y}{x}\right)=\log_y\dfrac{y}{x}+2. \end{cases}$

Решите уравнение (2—3):

2. $x^2-2x+1+\dfrac{1}{x^2-2x+1}=\dfrac{2}{\log_2(y^2+4y+6)}$.

3. $\log_5|x|+\log_{|x|}5=4\sin\dfrac{\pi}{y^2-8y+22}$.

IV вариант

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^{\log_x y-2}=\dfrac{x^2}{y} \\ \log_x\left(\dfrac{y}{x}-1\right)=\log_x\dfrac{y}{x^2}+2. \end{cases}$

Решите уравнение (2—3):

2. $x^2+2x+1+\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{4}{\log_2(y^2-6y+13)}$.

3. $\log_6|x|+\log_{|x|}6=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{y^2-10y+29}$.

С-50* Уравнения, неравенства, системы с параметром

I вариант

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $3^x+3^{-x}=a$.
2. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{x-2}\geqslant\sqrt{a-x}$.
3. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\log_a(2x-a)\geqslant\log_a(x-2)$.
4. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений $\begin{cases}\sin x\cos y=a^2+1\\ \sin y\cos x=-2a.\end{cases}$
5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2}=x-a$ имеет единственный корень.

II вариант

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $4^x+4^{-x}=a$.
2. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{x-3}\geqslant\sqrt{a-2x}$.
3. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\log_a(3x-a)\geqslant\log_a(2x-3)$.
4. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений $\begin{cases}\sin y\cos x=-a^2-1\\ \sin x\cos y=2a.\end{cases}$
5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственный корень.

III вариант

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $5^x+5^{-x}=a$.
2. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{2x+3}\geqslant\sqrt{a-x}$.
3. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\log_a(4x-a)\geqslant\log_a(3x-4)$.
4. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений $\begin{cases}\sin x\sin y=a^2+1\\ \cos y\cos x=-3a.\end{cases}$
5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a}=x+2$ имеет единственный корень.

IV вариант

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $6^x+6^{-x}=a$.
2. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{a-2x}$.
3. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\log_a(5x-a)\geqslant\log_a(4x-5)$.
4. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений $\begin{cases}\cos y\cos x=-a^2-1\\ \sin x\sin y=3a.\end{cases}$
5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+a}=x+3$ имеет единственный корень.

Контрольные работы

К-1 *I вариант*

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком (рис. 60). Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.

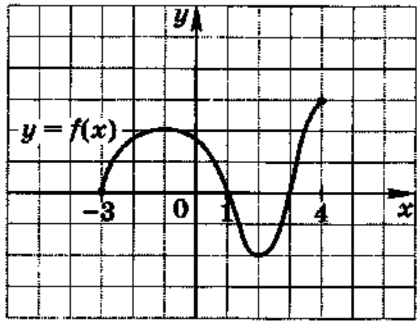

Рис. 60

2. Найдите область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$.
3. Постройте график функции $y=(x-2)^2-1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.
4. Докажите, что функция $f(x)$ четная, если:

   а) $f(x)=7\cos 4x+3x^2$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+2}-\dfrac{x^2+x}{x-2}$.

5*. Найдите область определения функции:

   а) $y=\sqrt{x^2-4}+\log_3(5-x)$; б) $y=\sqrt{9-\dfrac{1}{x^2}}$.

6*. Постройте график функции $y=1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

7*. Постройте график функции $y=\sqrt{|x|}-2$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

К-1 *II вариант*

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком (рис. 61). Укажите для этой функции: а) область определения; б) ну-

ли; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.

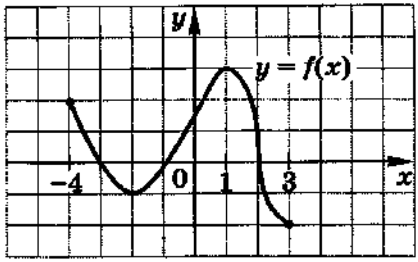

Рис. 61

2. Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$.

3. Постройте график функции $y=(x-4)^2-1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

4. Докажите, что функция $f(x)$ нечетная, если:

а) $f(x)=8\sin 3x-2x^5$; б) $f(x)=\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+1}{x-2}$.

5*. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{3-x}+\log_3(x^2-1)$; б) $y=\sqrt{\frac{1}{x^2}-4}$.

6*. Постройте график функции $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1$.

7*. Постройте график функции $y=\sqrt{|x|}-1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

К-1 *III вариант*

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком (рис. 62). Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.

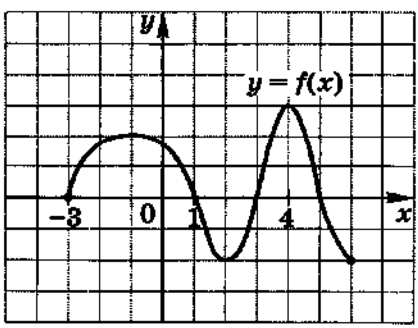

Рис. 62

2. Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-3}$.

3. Постройте график функции $y=(x+3)^2-4$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

4. Докажите, что функция $f(x)$ четная, если:

а) $f(x)=7\sin^2 4x+|x|$; б) $f(x)=\frac{x^2-5x}{7x+2}-\frac{x^2+5x}{7x-2}$.

5*. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-1}+\log_3(-x^2+x+12)$; б) $y=\sqrt{\frac{-3}{1-\frac{4}{x^2}}}$.

6*. Постройте график функции $y=2-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

7*. Постройте график функции $y=\sqrt{|x|-2}-1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

К-1 *IV вариант*

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком (рис. 63). Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.

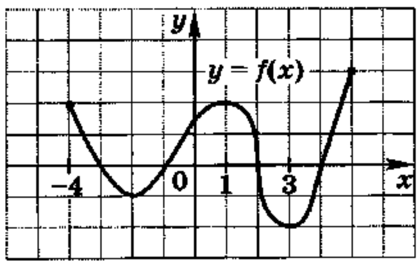

Рис. 63

2. Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{x+3}$.

3. Постройте график функции $y=(x+2)^2-4$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

4. Докажите, что функция $f(x)$ нечетная, если:

а) $f(x)=6\,\mathrm{tg}\,4x-3x^7$; б) $f(x)=\frac{9x-10}{5x+2}-\frac{9x+10}{5x-2}$.

5*. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{-x^2+x+20}+\log_3(x^2-9)$; б) $y=\sqrt{\dfrac{4}{\dfrac{1}{x^2}-1}}$.

6*. Постройте график функции $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$.

7*. Постройте график функции $y=\sqrt{|x|-1}-2$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

К-2 *I вариант*

1. Найдите $f'(x)$ и $f'(x_0)$, если:
а) $f(x)=3x^5-12x^2+6x+2$, $x_0=1$; б) $f(x)=x\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

2. Найдите $f'(x)$, если:
а) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$; б) $f(x)=5\sqrt[5]{x^3}$; в) $f(x)=5^x$; г) $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

3. Вычислите значение производной функции $y=\operatorname{tg}4x$ в точке $x_0=-\frac{\pi}{4}$.

4. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=x^3-6x^2+9x-11$ равна нулю.

5*. Найдите $f'(x)$, если:
а) $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}+3\sqrt[3]{x^4}$; б) $f(x)=\ln(3+2x)$; в) $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+3}$.

6*. Точка движется по прямой. Зависимость ее координаты x от времени t задана формулой $x=13+10t-5t^2$. Найдите момент времени t, когда точка остановится.

7*. Найдите производную функции $f(x)=\ln\sqrt{\cos x}$.

К-2 *II вариант*

1. Найдите $f'(x)$ и $f'(x_0)$, если:
а) $f(x)=-6x^4+5x^3+3x^2+3$, $x_0=1$; б) $f(x)=x\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

2. Найдите $f'(x)$, если:
а) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$; б) $f(x)=7\sqrt[7]{x^3}$; в) $f(x)=\log_5 x$;
г) $f(x)=\sqrt{4x-2}$.

3. Вычислите значение производной функции $y=\operatorname{ctg} 3x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$.

4. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=x^3+3x^2-9x-13$ равна нулю.

5*. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-6\sqrt[3]{x^4}$; б) $f(x)=e^{3x+2}$; в) $f(x)=x\sqrt{x^2-3x+4}$.

6*. Точка движется по прямой. Зависимость ее координаты x от времени t задана формулой $x=17+24t-4t^2$. Найдите момент времени t, когда точка остановится.

7*. Найдите производную функции $f(x)=e^{\sqrt{\sin x}}$.

К-2 *III вариант*

1. Найдите $f'(x)$ и $f'(x_0)$, если:

а) $f(x)=-5x^4+4x^3+6x^2-2x+3$, $x_0=1$;

б) $f(x)=x\operatorname{tg} x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

2. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x)=\frac{2x+3}{3x-2}$; б) $f(x)=5\sqrt[5]{x^4}$; в) $f(x)=10^x$; г) $f(x)=\sqrt{4x+3}$.

3. Вычислите значение производной функции $y=\cos 3x$ в точке $x_0=-\frac{\pi}{6}$.

4. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=x^3-4x^2+5x-17$ равна нулю.

5*. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x)=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+12\sqrt[3]{x^5}$; б) $f(x)=\lg(4-3x)$;

в) $f(x)=4x\sqrt{3x^2-2x+1}$.

6*. Точка движется по прямой. Зависимость ее координаты x от времени t задана формулой $x=23+20t-5t^2$. Найдите момент времени t, когда точка остановится.

7*. Найдите производную функции $f(x)=\ln\sqrt{5+\sin x}$.

К-2 *IV вариант*

1. Найдите $f'(x)$ и $f'(x_0)$, если:

а) $f(x)=5x^3-4x^4+2x^2-3x+5$, $x_0=1$;

б) $f(x)=x\operatorname{ctg} x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

2. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x)=\frac{3x-2}{2x+3}$; б) $f(x)=7\sqrt[7]{x^6}$; в) $f(x)=\lg x$;

г) $f(x)=\sqrt{6x+5}$.

3. Вычислите значение производной функции $y=\sin 2x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$.

4. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=x^3+2x^2-7x-13$ равна нулю.

5*. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x)=\frac{12}{\sqrt[3]{x}}-6\sqrt[3]{x^5}$; б) $f(x)=10^{4x-3}$;

в) $f(x)=3x\sqrt{4x^2-2x+1}$.

6*. Точка движется по прямой. Зависимость ее координаты x от времени t задана формулой $x=27+24t-2t^2$. Найдите момент времени t, когда точка остановится.

7*. Найдите производную функции $f(x)=e^{\sqrt{5-\cos x}}$.

К-3 *I вариант*

1. Дана функция $f(x)=2x^3+3x^2-1$. Найдите:

а) промежутки возрастания и убывания функции;

б) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-1;\ 2]$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+3x^2-2x+2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

3. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x$ и постройте ее график.

4. Число 72 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы два из них были равны между собой, а сумма квадратов этих трех чисел была наименьшей.

5*. Дана функция $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$. Найдите:

а) область определения функции;

б) промежутки возрастания и убывания функции;

в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[2;\ 5]$.

6*. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x^2+2x+10$, параллельной прямой $y=-x+5$.

7*. Определите промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $y=5x-\sin 2x$.

К-3 *II вариант*

1. Дана функция $f(x)=x^3-3x^2+1$. Найдите:

   а) промежутки возрастания и убывания функции;

   б) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-2;\ 1]$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x^2+2x+4$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

3. Исследуйте функцию $f(x)=x^4-2x^2$ и постройте ее график.

4. Число 78 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы два из них были пропорциональны числам 1 и 3, а сумма квадратов этих трех чисел была наименьшей.

5*. Дана функция $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-7}$. Найдите:

   а) область определения функции;

   б) промежутки возрастания и убывания функции;

   в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[3;\ 7]$.

6*. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+3x^2+x+7$, параллельной прямой $y=-2x+1$.

7*. Определите промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $y=7x+\cos 2x$.

К-3 *III вариант*

1. Дана функция $f(x)=2x^3-3x^2+2$. Найдите:

   а) промежутки возрастания и убывания функции;

   б) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-1;\ 1]$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

3. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-12x$ и постройте ее график.

4. Число 63 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы два из них были пропорциональны числам 1 и 2, а произведение этих трех чисел было наибольшим.

5*. Дана функция $f(x)=\sqrt{-x^2-8x-12}$. Найдите:

   а) область определения функции;

   б) промежутки возрастания и убывания функции;

   в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-5;\ -2]$.

6*. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+6x^2+15x-3$, параллельной прямой $y=3x+5$.

7*. Определите промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $y=4x+\sin 3x$.

К-3 *IV вариант*

1. Дана функция $f(x)=2x^3+6x^2-1$. Найдите:

   а) промежутки возрастания и убывания функции;

   б) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-3;\ 0]$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+x^2-2x+1$ в точке с абсциссой $x_0=-1$.

3. Исследуйте функцию $f(x)=x^4-2x^2+2$ и постройте ее график.

4. Число 66 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы два из них были пропорциональны числам 1 и 3, а произведение этих трех чисел было наибольшим.

5*. Дана функция $f(x)=\sqrt{-x^2-6x-5}$. Найдите:

   а) область определения функции;

   б) промежутки возрастания и убывания функции;

   в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-4;\ -1]$.

6*. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-6x^2+10x-1$, параллельной прямой $y=-2x+1$.

7*. Определите промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $y=6x-\cos 3x$.

К-4 *I вариант*

1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:

   а) $F(x)=x^3-5x^2+7x-11$ и $f(x)=3x^2-10x+7$, $x\in \boldsymbol{R}$;

   б) $F(x)=2x^5+e^x$ и $f(x)=10x^4+e^x$, $x\in \boldsymbol{R}$.

2. Найдите первообразную для функции:

   а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-2\sin x$, $x\neq 0$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$.

3. Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=4x^3-8x$, график которой проходит через точку $A(1;\ 3)$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=4$.

5*. Найдите:

а) $\int\sqrt{3x+1}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{1+9x^2}$.

6*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6x+7$ и $y=-x^2+4x-1$.

7*. Вычислите $\int\limits_0^3|x-2|\,dx$.

К-4 *II вариант*

1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:

а) $F(x)=x^3+4x^2-5x+7$ и $f(x)=3x^2+8x-5$, $x\in\mathbf{R}$;

б) $F(x)=3x^4-\ln x$ и $f(x)=12x^3-\frac{1}{x}$, $x>0$.

2. Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=\frac{2}{x^3}+\cos x$, $x\neq0$; б) $f(x)=3e^x$, $x\in\mathbf{R}$.

3. Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=3x^2+4x$, график которой проходит через точку $A(1;\ 5)$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=9$.

5*. Найдите:

а) $\int\sqrt{4x+5}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

6*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4x+2$ и $y=-x^2+6x-6$.

7*. Вычислите $\int\limits_0^3|x-1|\,dx$.

К-4 *III вариант*

1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:

а) $F(x)=3x^3+5x^2+\operatorname{tg}x-8$ и $f(x)=9x^2+10x+\frac{1}{\cos^2x}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

б) $F(x)=6x^5+\ln 6x$ и $f(x)=30x^4+\frac{1}{x}$, $x>0$.

2. Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=\frac{3}{x^4}+4\sin x$, $x\neq0$; б) $f(x)=\frac{1}{5x}$, $x>0$.

3. Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=-4x^3+\frac{1}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1;\ 2)$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=0{,}5$, $x=-\frac{\pi}{3}$ и $x=\frac{\pi}{3}$.

5*. Найдите:

а) $\int\sqrt{5-4x}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{1+16x^2}$.

6*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ и $y=-x^2+2x+5$.

7*. Вычислите $\int\limits_0^3 ||x-2|-1|\,dx$.

К-4 *IV вариант*

1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:

а) $F(x)=2x^3-6x^2-\operatorname{ctg}x+7$ и $f(x)=6x^2-12x+\frac{1}{\sin^2 x}$, $x\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

б) $F(x)=5x^6-\ln 7x$ и $f(x)=30x^5-\frac{1}{x}$, $x>0$.

2. Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=\frac{4}{x^5}-3\cos x$, $x\neq 0$; б) $f(x)=\frac{5}{x}$, $x>0$.

3. Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=-3x^2+\frac{1}{x^2}$, график которой проходит через точку $A(1;\ 4)$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0{,}5$, $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{5\pi}{6}$.

5*. Найдите:

а) $\int\sqrt{6-5x}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

6*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-\frac{1}{2}x^2+x+5\frac{1}{2}$ и $y=x^2-2x+1$.

7*. Вычислите $\int\limits_0^3 ||x-1|-2|\,dx$.

К-5 *I вариант*

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^3-x^2+1}=\sqrt[3]{2x^2-2x+1}$.

Решите неравенство (2—3):

2. $(x^2+3^x+3)^5>(x^2+9^x-3^x)^5$. 3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$.

Решите уравнение (4—7):

4. $\sqrt{x-5}=x-7$.
5. $\log_5(x+1)+\log_5(x-3)=1$.
6*. $\sqrt{x^2+\sqrt{x}-3}=\sqrt{2x+\sqrt{x}}$.
7*. $\frac{2\sin^2 x}{1-\cos x}=3$.

К-5 *II вариант*

1. Решите уравнение $\sqrt[5]{x^3+4x^2-2}=\sqrt[5]{x^2+4x-2}$.

Решите неравенство (2—3):

2. $(x^3+2\cdot 2^x+2)^3>(x^3+4^x+2^x)^3$. 3. $8^{x^2+7}>8^{3x+5}$.

Решите уравнение (4—7):

4. $\sqrt{x+3}=x-3$.
5. $\log_6(x+3)+\log_6(x-2)=1$.
6*. $\sqrt{x^2+2x-\sqrt{x}}=\sqrt{3-\sqrt{x}}$.
7*. $\frac{2\sin^2 x}{\cos x+1}=1$.

К-5 *III вариант*

1. Решите уравнение $\sqrt[7]{x^3-5x^2+11}=\sqrt[7]{2x^2-6x+11}$.

Решите неравенство (2—3):

2. $(\sqrt[3]{x}+3^{x+1}-3)^9>(\sqrt[3]{x}+9^x-3^x)^9$. 3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3}>\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-5}$.

Решите уравнение (4—7):

4. $\sqrt{x-2}=x-4$.
5. $\log_5(x+3)=1-\log_5(x-1)$.
6*. $\sqrt{x^2-5x+\sqrt{x}}=\sqrt{6+\sqrt{x}}$.
7*. $\frac{2\cos^2 x}{\sin x-1}=-3$.

К-5 *IV вариант*

1. Решите уравнение $\sqrt[9]{x^3-8x^2+13}=\sqrt[9]{2x^2-9x+13}$.

Решите неравенство (2—3):

2. $(\sqrt[5]{x}+2^{x+2}-4)^7>(\sqrt[5]{x}+4^x-2^x)^7$. 3. $11^{3x^2-1}>11^{7x+5}$.

Решите уравнение (4—7):

4. $\sqrt{x-4}=x-6$.

5. $\log_6(x-3)=1-\log_6(x+2)$.

6*. $\sqrt{x^2+5x-\sqrt{x}}=\sqrt{6-\sqrt{x}}$.

7*. $\dfrac{2\cos^2 x}{\sin x+1}=1$.

К-6 *I вариант*

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{x-6}=x-7$.

2. $\lg(x^3-5x^2+6x+7)=\lg(x^3-4x^2+7x+1)$.

3. $(x^2-5x-14)\sqrt{x-6}=0$.

4. $\dfrac{\sin 2\pi x}{4x-1}=\dfrac{1}{4x-1}$.

Решите неравенство (5—6):

5. $\sqrt{3x-2}\leqslant x$.

6*. $\sqrt{x+3}>x-3$.

7*. Решите уравнение $2^{3x+7}+\sqrt{3x+7}=2^{x^2-11}+\sqrt{x^2-11}$.

К-6 *II вариант*

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{x+2}=x-3$.

2. $\lg(x^3-5x^2+3x+21)=\lg(x^3-6x^2+4x+27)$.

3. $(x^2-6x-16)\sqrt{x-3}=0$.

4. $\dfrac{\cos\pi x}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}$.

Решите неравенство (5—6):

5. $\sqrt{x-5}<x-7$.

6*. $\sqrt{3x+4}\geqslant x$.

7*. Решите уравнение $5^{7x-1}+\sqrt{7x-1}=5^{x^2-9}+\sqrt{x^2-9}$.

К-6 *III вариант*

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{x-3}=x-4$.

2. $\lg(x^3-2x^2-4x-2)=\lg(x^3-x^2-7x-6)$.

3. $(x-1)\sqrt{x^2-x-12}=0$.

4. $\dfrac{\cos 2\pi x}{2x-1}=\dfrac{-1}{2x-1}$.

Решите неравенство (5—6):

5. $\sqrt{3x+1}\leqslant x+1$.

6*. $\sqrt{x+4}>x-2$.

7*. Решите уравнение $3^{x^2-5}+\sqrt{x^2-5}=3^{x+1}+\sqrt{x+1}$.

К-6 IV вариант

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{x+4}=x-3$.
2. $\lg(x^3-5x^2-2x+6)=\lg(x^3-4x^2-6x+1)$.
3. $(x+1)\sqrt{x^2+2x-15}=0$. 4. $\frac{\sin \pi x}{2x+1}=\frac{-1}{2x+1}$.

Решите неравенство (5—6):

5. $\sqrt{x-3}<x-5$. 6*. $\sqrt{3x+1}\geqslant x-1$.

7*. Решите уравнение $4^{x^2-14}+\sqrt{x^2-14}=4^{x-2}+\sqrt{x-2}$.

К-7 I вариант

1. Решите уравнение $|x-3|-|2x-4|=-5$.

Решите неравенство (2—3):

2. $\log_{0,2}(x-2)+\log_{0,2}x>\log_{0,2}(2x-3)$.
3. $\frac{\sqrt{36-x^2}\cdot\log_{0,5}x}{x-2}\leqslant 0$.

Решите систему уравнений (4—5):

4. $\begin{cases}3\sqrt{x+y}-2\sqrt{x-y}=4\\2\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=3.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}2^{\log_2(x+y+1)}=x^2+y-1\\\log_{\sqrt{29}}(y^2+2x)=2.\end{cases}$

6*. Решите уравнение $\log_x(x^2+3)=\log_x(4x)$.

7*. Решите неравенство $x^2-2x+2\leqslant\cos\pi(x+1)$.

К-7 II вариант

1. Решите уравнение $|x-2|-|2x+2|=1$.

Решите неравенство (2—3):

2. $\log_3(x+2)+\log_3 x<\log_3(2x+1)$.
3. $\frac{\sqrt{49-x^2}\cdot\log_5 x}{x-5}\geqslant 0$.

Решите систему уравнений (4—5):

4. $\begin{cases}2\sqrt{x+y}-3\sqrt{x-y}=3\\3\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}3^{\log_3(x-y+1)}=x^2-y-1\\\log_{\sqrt{21}}(y^2-2x)=2.\end{cases}$

6*. Решите уравнение $\log_x(x^2+4)=\log_x(5x)$.

7*. Решите неравенство $x^2-4x+5\leqslant\sin\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

К-7 *III вариант*

1. Решите уравнение $|2x-8|-|x+1|=-2$.

Решите неравенство (2—3):

2. $\log_{0,3}(x-1)+\log_{0,3}(x+1)>\log_{0,3}(2x-1)$.

3. $\dfrac{\sqrt{9-x^2}\cdot\log_{0,3}x}{x-2}\leqslant 0$.

Решите систему уравнений (4—5):

4. $\begin{cases}3\sqrt{x+y}-4\sqrt{x-y}=2\\2\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=5.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}5^{\log_5(x-y+2)}=x^2-y-4\\\log_{\sqrt{23}}(y^2-3x)=2.\end{cases}$

6*. Решите уравнение $\log_x(x^2+5)=\log_x(6x)$.

7*. Решите неравенство $x^2+2x+2\leqslant\cos\pi(x+3)$.

К-7 *IV вариант*

1. Решите уравнение $|3x-9|-|x+2|=7$.

Решите неравенство (2—3):

2. $\log_5(x+3)+\log_5(x+1)<\log_5(2x+3)$.

3. $\dfrac{\sqrt{16-x^2}\cdot\log_6 x}{x-3}\geqslant 0$.

Решите систему уравнений (4—5):

4. $\begin{cases}5\sqrt{x+y}-2\sqrt{x-y}=1\\3\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=5.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}7^{\log_7(x+y+1)}=x^2+y-1\\\log_{\sqrt{13}}(y^2+2x)=2.\end{cases}$

6*. Решите уравнение $\log_x(x^2+6)=\log_x(7x)$.

7*. Решите неравенство $x^2+4x+5\leqslant\sin\pi\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$.

Итоговый тест для самоконтроля

I вариант

ЧАСТЬ I

К каждому из заданий *А*1—*А*13 дано 4 ответа, из которых только один верный. Для каждого задания запишите номер выбранного вами правильного ответа.

***А*1.** Найдите значение выражения $64^{\frac{1}{4}} - 2\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$.

1) $2\sqrt{2}-2$; 2) $2\sqrt{2}-4$; 3) 12; 4) 0.

***А*2.** Упростите выражение $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5 : \sqrt[6]{a}$.

1) $a^{\frac{13}{12}}$; 2) $a^{\frac{17}{12}}$; 3) $a^{\frac{5}{24}}$; 4) $a^{\frac{15}{2}}$.

***А*3.** Упростите выражение $5^{\log_{25}(\sqrt{3}-3)^2} + 2^{\log_4(\sqrt{3}+3)^2}$.

1) $\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) 3; 4) 6.

***А*4.** Определите, какому из указанных промежутков принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} = 8^{-5}$.

1) $(-4;\ 0)$; 2) $(4;\ 7)$; 3) $(-2;\ 1)$; 4) $(0;\ 6)$.

***А*5.** Определите, какому из указанных промежутков принадлежит корень уравнения $\log_2(x-5)=3$.

1) $(6;\ 10)$; 2) $[10;\ 13)$; 3) $[13;\ 14)$; 4) $[14;\ 16)$.

***А*6.** Решите неравенство $9\cdot 3^{x+1} > \frac{1}{3}$.

1) $(-4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4)$; 3) $(-\infty;\ 1{,}5)$; 4) $(1{,}5;\ +\infty)$.

***А*7.** Упростите выражение

$$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^2(\alpha+\pi).$$

1) $2\cos^2\alpha$; 2) $-2\cos 2\alpha$; 3) 1; 4) 0.

***А*8.** Решите неравенство $\log_2(x+5) \leqslant 3$.

1) $(-\infty;\ 3]$; 2) $(-5;\ 3]$; 3) $(-10;\ -2]$; 4) $[3;\ +\infty)$.

***А*9.** Решите уравнение $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$.

1) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$;

3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z$; 4) $\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z$.

***A*10.** Найдите область определения функции $y=\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}$.

1) $(-\infty;\ -1)\cup[4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -1]\cup[4;\ +\infty)$;
3) $[4;\ +\infty)$; 4) $(-1;\ 4]$.

***A*11.** Найдите производную функции $f(x)=5x^3-\operatorname{tg}x+1$.

1) $15x^2-\frac{1}{\sin^2 x}$; 2) $15x^2+\frac{1}{\sin^2 x}$;
3) $15x^2-\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $15x^2-\frac{1}{\cos^2 x}+1$.

***A*12.** Пользуясь графиком функции $y=f(x)$, к которому в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 64), найдите $f'(x_0)$.

1) $f'(x_0)=6$;
2) $f'(x_0)=-2$;
3) $f'(x_0)=-3$;
4) $f'(x_0)=2$.

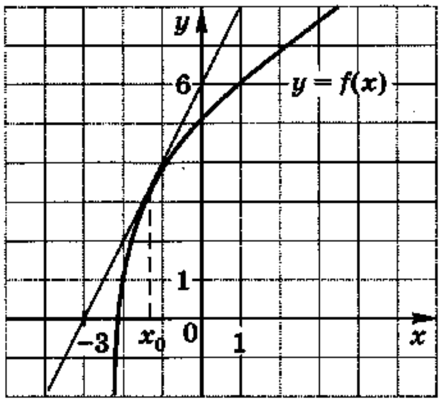

Рис. 64

***A*13.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2x+4$ и $y=4-2x$.

1) $11\frac{1}{3}$; 2) $10\frac{1}{3}$; 3) $10\frac{2}{3}$; 4) $11\frac{2}{3}$.

ЧАСТЬ II

К каждому из заданий ***B*1—*B*7** укажите полученный вами ответ (только число).

***B*1.** Вычислите $5\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

***B*2.** Найдите точку локального максимума функции

$$f(x)=x^3-6x^2+4.$$

***B*3.** Вычислите $(\sqrt[6]{6}-\sqrt[6]{2})\left((\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{12}\right)(\sqrt[6]{6}+\sqrt[6]{2})$.

***B*4.** Найдите значение выражения

$$\frac{\sin 55^\circ\cos 5^\circ+\sin 5^\circ\cos 55^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\sin 65^\circ\sin 5^\circ}\cdot\sqrt{3}.$$

***B*5.** Решите уравнение $\sqrt{x+6}=2x-3$. В ответе укажите корень уравнения или сумму всех корней, если их несколько.

***B*6.** Найдите число целых решений неравенства

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x-7}\geqslant 1.$$

***B*7.** Найдите произведение корней уравнения

$$12\cdot 4^x-35\cdot 6^x+18\cdot 9^x=0.$$

ЧАСТЬ III

К каждому из заданий *C*1—*C*3 приведите полное решение.

***C*1.** Решите неравенство $(3x-2)\sqrt{x^2+2x-15}\geqslant 0$.

***C*2.** Для каждого значения параметра α решите неравенство $\log_{\sin\alpha+1,5}(3x-7)\geqslant\log_{\sin\alpha+1,5}(5-x)$.

***C*3.** Решите уравнение $e^{4x+5}+\sqrt[3]{4x+5}=e^{-x}+\sqrt[3]{-x}$.

II вариант

ЧАСТЬ I

К каждому из заданий *A*1—*A*13 дано 4 ответа, из которых только один верный. Для каждого задания запишите номер выбранного вами правильного ответа.

***A*1.** Найдите значение выражения $81^{\frac{1}{4}}-(2\sqrt{3})^2$.

1) 8,25; 2) -3; 3) 15; 4) -9.

***A*2.** Упростите выражение $\left(a^{\frac{1}{2}}-5\right)^2+10a^{\frac{1}{2}}$.

1) $a+25$; 2) $a-25$; 3) $a+20a^{\frac{1}{2}}+25$; 4) $a+10a^{\frac{1}{2}}+25$.

***A*3.** Упростите выражение $36^{\log_6\sqrt{3+\sqrt{10}}}-3^{\log_9(3-\sqrt{10})^2}$.

1) $\sqrt{10}$; 2) $2\sqrt{10}$; 3) 3; 4) 6.

***A*4.** Определите, какому из указанных промежутков принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{-7}=3^{5x-7}$.

1) $(-5;\ -1]$; 2) $(-1;\ 3)$; 3) $(4;\ 6)$; 4) $[2;\ 4]$.

A5. Определите, какому из указанных промежутков принадлежит корень уравнения $\log_2(8x)=5$.

1) $[4; 6)$; 2) $[1; 2]$; 3) $(2; 3)$; 4) $(3; 4)$.

A6. Решите неравенство $125\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}<\frac{1}{5}$.

1) $\left(\frac{7}{6}; +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty; \frac{7}{6}\right)$; 3) $(-\infty; 3)$; 4) $(3; +\infty)$.

A7. Упростите выражение $\cos 2\alpha-\cos^2(\pi+\alpha)$.

1) $2-3\sin^2\alpha$; 2) $1-3\sin^2\alpha$; 3) $-\sin^2\alpha$; 4) $\cos^2\alpha$.

A8. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)\geqslant-2$.

1) $(-\infty; 12]$; 2) $(3; 12]$; 3) $(0; 9]$; 4) $[12; +\infty)$.

A9. Решите уравнение $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

1) $\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$;

3) $\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$.

A10. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\frac{2x+4}{x-1}}$.

1) $(-\infty; -2]\cup(1; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$;
3) $(-\infty; -2)\cup[1; +\infty)$; 4) $[-2; 1)$.

A11. Найдите производную функции $f(x)=5x^7-2\sin x+4$.

1) $35x^6+2\cos x$; 2) $35x^6-2\cos x$;

3) $35x^6-2\cos x+4$; 4) $35x^6+2\cos x+4$.

A12. Пользуясь графиком функции $y=f(x)$, к которому в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 65), найдите $f'(x_0)$.

1) $f'(x_0)=3$;

2) $f'(x_0)=-2$;

3) $f'(x_0)=-0,5$;

4) $f'(x_0)=0,5$.

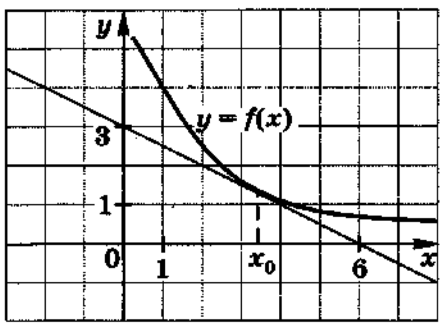

Рис. 65

A13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=9-2x^2$ и $y=9+4x$.

1) $2\frac{1}{3}$; 2) $3\frac{1}{3}$; 3) $3\frac{2}{3}$; 4) $2\frac{2}{3}$.

ЧАСТЬ II

К каждому из заданий **B1—B7** укажите полученный вами ответ (только число).

***B*1.** Вычислите $13\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{12}{5}\right)$.

***B*2.** Найдите точку локального минимума функции

$$f(x)=x^3+3x^2-9x.$$

***B*3.** Вычислите $\dfrac{(\sqrt{5}-2\sqrt[4]{15}+\sqrt{3})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$.

***B*4.** Найдите значение выражения

$$\frac{6\cos^2 37^\circ-3}{\sin 49^\circ \sin 25^\circ-\cos 49^\circ \cos 25^\circ}.$$

***B*5.** Решите уравнение $\sqrt{2x+1}=x-1$. В ответе укажите корень уравнения или сумму всех корней, если их несколько.

***B*6.** Найдите число целых решений неравенства

$$\sqrt{8x-x^2}\geqslant 2x-4.$$

***B*7.** Найдите произведение корней уравнения

$$6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x-13=0.$$

ЧАСТЬ III

К каждому из заданий **C1—C3** приведите полное решение.

***C*1.** Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x-12}}{4x-3}\leqslant 0$.

***C*2.** Для каждого значения параметра α решите неравенство $\log_{\sin^2\alpha+0,5}(5x-7)\leqslant\log_{\sin^2\alpha+0,5}(2x+2)$.

***C*3.** Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi|x-3,5|}{\cos\pi x}\right)=\lg(|x^2-7x+12|+1)+1.$$

Ответы к контрольным работам

К—1. I вар. 1. а) $[-3;\ 4]$; б) $-3;\ 1;\ 3$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-3;\ 1)\cup(3;\ 4]$; $f(x)<0$ при $x\in(1;\ 3)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутках $[-3;\ -1]$ и $[2;\ 4]$, убывает на промежутке $[-1;\ 2]$; д) $3;\ -2$; е) $[-2;\ 3]$. **2.** $[-3;\ -1)\cup(-1;\ 3]$. **3.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $1,\ 3$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(1;\ 3)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[2;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ 2]$; д) $[-1;\ +\infty)$. **5.** а) $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ 5)$; б) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **7.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $-4,\ 4$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-4;\ 4)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$; д) $[-2;\ +\infty)$. **II вар. 1.** а) $[-4;\ 3]$; б) $-3;\ -1;\ 2$; в) $f(x)>0$ при $x\in[-4;\ -3)\cup(-1;\ 2)$; $f(x)<0$ при $x\in(-3;\ -1)\cup(2;\ 3]$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[-2;\ 1]$, убывает на промежутках $[-4;\ -2]$ и $[1;\ 3]$; д) $3;\ -2$; е) $[-2;\ 3]$. **2.** $[-2;\ 1)\cup(1;\ 2]$. **3.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $3,\ 5$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ 3)\cup(5;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(3;\ 5)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[4;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ 4]$; д) $[-1;\ +\infty)$. **5.** а) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 3]$; б) $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$. **7.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $-1;\ 1$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-1;\ 1)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$; д) $[-1;\ +\infty)$. **III вар. 1.** а) $[-3;\ 6]$; б) $-3;\ 1;\ 3;\ 5$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-3;\ 1)\cup(3;\ 5)$; $f(x)<0$ при $x\in(1;\ 3)\cup(5;\ 6]$; г) $f(x)$ возрастает на промежутках $[-3;\ -1]$ и $[2;\ 4]$, убывает на промежутках $[-1;\ 2]$ и $[4;\ 6]$; д) $3;\ -2$; е) $[-2;\ 3]$. **2.** $[-5;\ 3)\cup(3;\ 5]$. **3.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $-5;\ -1$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -5)\cup(-1;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-5;\ -1)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[-3;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ -3]$; д) $[-4;\ +\infty)$. **5.** а) $(-3;\ -1]\cup[1;\ 4)$; б) $(-2;\ 0)\cup(0;\ 2)$. **7.** а) $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty)$; б) $-3;\ 3$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -3)\cup(3;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-3;\ -2]\cup[2;\ 3)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[2;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ -2]$; д) $[-1;\ +\infty)$. **IV вар. 1.** а) $[-4;\ 5]$; б) $-3;\ -1;\ 2;\ 4$; в) $f(x)>0$ при $x\in[-4;\ -3)\cup(-1;\ 2)\cup(4;\ 5]$; $f(x)<0$ при $x\in(-3;\ -1)\cup(2;\ 4)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутках $[-2;\ 1]$ и $[3;\ 5]$, убывает на промежутках $[-4;\ -2]$ и $[1;\ 3]$; д) $3;\ -2$; е) $[-2;\ 3]$. **2.** $[-4;\ -3)\cup(-3;\ 4]$. **3.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $-4,\ 0$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -4)\cup(0;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-4;\ 0)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[-2;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ -2]$; д) $[-4;\ +\infty)$. **5.** а) $[-4;\ -3)\cup(3;\ 5]$; б) $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$. **7.** а) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$; б) $-5;\ 5$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -5)\cup(5;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-5;\ -1]\cup[1;\ 5)$; г) $f(x)$ возрастает на промежутке $[1;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ -1]$; д) $[-2;\ +\infty)$.

К—2. I вар. 1. а) $f'(x)=15x^4-24x+6$; $f'(1)=-3$; б) $f'(x)=\sin x+$ $+x\cos x$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. 2. а) $\frac{-7}{(x-3)^2}$; б) $\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}$; в) $5^x\ln 5$; г) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

3. 4. 4. 1; 3. 5. а) $-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}+4\sqrt[3]{x}$; б) $\frac{2}{3+2x}$; в) $\frac{2x^2+3x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

6. $t=1$ с. 7. $-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. II вар. 1. а) $f'(x)=-24x^3+15x^2+6x$;

$f'(1)=-3$; б) $f'(x)=\cos x-x\sin x$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$. 2. а) $\frac{5}{(x+1)^2}$;

б) $\frac{3}{\sqrt[7]{x^4}}$; в) $\frac{1}{x\ln 5}$; г) $\frac{2}{\sqrt{4x-2}}$. 3. -3. 4. 1; -3. 5. а) $-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}-$

$-8\sqrt[3]{x}$; б) $3e^{3x+2}$; в) $\frac{4x^2-9x+8}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$. 6. $t=3$ с. 7. $\frac{\cos x\cdot e^{\sqrt{\sin x}}}{2\sqrt{\sin x}}$.

III. вар. 1. а) $f'(x)=-20x^3+12x^2+12x-2$; $f'(1)=2$; б) $f'(x)=$ $=\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\pi}{2}$. 2. а) $\frac{-13}{(3x-2)^2}$; б) $\frac{4}{\sqrt[5]{x}}$; в) $10^x\ln 10$;

г) $\frac{2}{\sqrt{4x+3}}$. 3. 3. 4. 1, $\frac{5}{3}$. 5. а) $-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}+20\sqrt[3]{x^2}$; б) $\frac{3}{(3x-4)\lg 10}$;

в) $\frac{24x^2-12x+4}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$. 6. $t=2$ с. 7. $\frac{\cos x}{10+2\sin x}$. IV вар. 1. а) $f'(x)=$

$=-16x^3+15x^2+4x-3$; $f'(1)=0$; б) $f'(x)=\operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

$=1-\frac{\pi}{2}$. 2. а) $\frac{13}{(2x+3)^2}$; б) $\frac{6}{\sqrt[7]{x}}$; в) $\frac{1}{x\ln 10}$; г) $\frac{3}{\sqrt{6x+5}}$. 3. -1.

4. 1; $-\frac{7}{3}$. 5. а) $-\frac{4}{\sqrt[3]{x^4}}-10\sqrt[3]{x^2}$; б) $4\cdot 10^{4x-3}\cdot\ln 10$; в) $\frac{24x^2-9x+3}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

6. $t=6$ с. 7. $\frac{\sin x\cdot e^{\sqrt{5-\cos x}}}{2\sqrt{5-\cos x}}$.

К—3. I вар. 1. а) $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[0; +\infty)$, убывает на промежутке $[-1; 0]$; б) 27 и -1. 2. $y=7x-3$. 4. 24, 24, 24. 5. а) $[1; 5]$; б) $f(x)$ возрастает на промежутке $[1; 3]$, убывает на промежутке $[3; 5]$; в) 2; 0. 6. $y=-x+11$. 7. График функции имеет выпуклость вверх на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$, выпуклость вниз на промежутках $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

II вар. 1. а) $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$, убывает на промежутке $[0; 2]$; б) 1 и -19. 2. $y=-x+5$. 4. 12, 36, 30. 5. а) $[1; 7]$; б) $f(x)$ возрастает на промежутке $[1; 4]$, убывает на промежутке [4; 7]; в) 3; 0. 6. $y=-2x+6$. 7. График функции имеет выпуклость вниз на промежутках $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$, выпуклость вверх на промежутках $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. **III вар.** 1. а) $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;\ 0]$ и $[1;\ +\infty)$, убывает на промежутке $[0;\ 1]$; б) 2 и -3. 2. $y=2x-5$. 4. 14, 28, 21. 5. а) $[-6;\ -2]$; б) $f(x)$ возрастает на промежутке $[-6;\ -4]$, убывает на промежутке $[-4;\ -2]$; в) 2; 0. 6. $y=3x-11$. 7. График функции имеет выпуклость вверх на промежутках $\left(\frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in \mathbf{Z}$, выпуклость вниз на промежутках $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. **IV вар.** 1. а) $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ +\infty)$, убывает на промежутке $[-2;\ 0]$; б) 7 и -1. 2. $y=-x+2$. 4. 11, 33, 22. 5. а) $[-5;\ -1]$; б) $f(x)$ возрастает на промежутке $[-5;\ -3]$, убывает на промежутке $[-3;\ -1]$; в) 2; 0. 6. $y=-2x+7$. 7. График функции имеет выпуклость вниз на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in \mathbf{Z}$, выпуклость вверх на промежутках $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in \mathbf{Z}$.

К—4. **I вар.** 2. а) $F(x)=-\frac{1}{x}+2\cos x+C$; б) $F(x)=\ln|x|+C$. 3. $F(x)=x^4-4x^2+6$. 4. $10\frac{2}{3}$. 5. а) $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3}+C$; б) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x)+$ $+C$. 6. 9. 7. 2,5. **II вар.** 2. а) $F(x)=-\frac{1}{x^2}+\sin x+C$; б) $F(x)=$ $=3e^x+C$. 3. $F(x)=x^3+2x^2+2$. 4. 36. 5. а) $\frac{1}{6}\sqrt{(4x+5)^3}+C$; б) $\frac{1}{2}\arcsin(2x)+C$. 6. 9. 7. 2,5. **III вар.** 2. а) $F(x)=-\frac{1}{x^3}-$ $-4\cos x+C$; б) $F(x)=\frac{1}{5}\ln x+C$. 3. $F(x)=-x^4-\frac{1}{x}+4$. 4. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 5. а) $-\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x)^3}+C$; б) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(4x)+C$. 6. 16. 7. 1,5. **IV вар.** 2. а) $F(x)=-\frac{1}{x^4}-3\sin x+C$; б) $F(x)=5\ln x+C$. 3. $F(x)=$ $=-x^3-\frac{1}{x}+6$. 4. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 5. а) $-\frac{2}{15}\sqrt{(6-5x)^3}+C$; б) $\frac{1}{3}\arcsin(3x)+C$. 6. 16. 7. 3,5.

К—5. **I вар.** 1. 0; 1; 2. 2. $(-\infty;\ 1)$. 3. $(1;\ 2)$. 4. 9. 5. 4. 6. 3. 7. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **II вар.** 1. -4; 0; 1. 2. $(-\infty;\ 1)$. 3. $(-\infty;\ 1)\cup$ $\cup(2;\ +\infty)$. 4. 6. 5. 3. 6. 1. 7. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **III вар.** 1. 0; 1; 6.

2. $(0;\ 1)$. **3.** $(1;\ 2)$. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 6. **7.** $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.
IV вар. **1.** 0; 1; 9. **2.** $(0;\ 2)$. **3.** $\left(-\infty;\ -\dfrac{2}{3}\right)\cup(3;\ +\infty)$. **4.** 8. **5.** 4. **6.** 1. **7.** $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

К—6. I вар. **1.** $\dfrac{15+\sqrt{5}}{2}$. **2.** 2. **3.** 6; 7. **4.** $\dfrac{1}{4}+n,\ n\in\boldsymbol{Z},\ n\neq 0$. **5.** $\left[\dfrac{2}{3};\ 1\right]\cup[2;\ +\infty)$. **6.** $[-3;\ 6)$. **7.** 6. **II вар.** **1.** $\dfrac{7+\sqrt{21}}{2}$. **2.** 3. **3.** 3; 8. **4.** $2n,\ n\in\boldsymbol{Z},\ n\neq 1$. **5.** $(9;\ +\infty)$. **6.** $\left[-\dfrac{4}{3};\ 4\right]$. **7.** 8. **III вар.** **1.** $\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$. **2.** 4. **3.** -3; 4. **4.** $\dfrac{1}{2}+n,\ n\in\boldsymbol{Z},\ n\neq 0$. **5.** $\left[-\dfrac{1}{3};\ 0\right]\cup[1;\ +\infty)$. **6.** $[-4;\ 5)$. **7.** 3. **IV вар.** **1.** $\dfrac{7+\sqrt{29}}{2}$. **2.** -1. **3.** -5; 3. **4.** $-\dfrac{1}{2}+2n,\ n\in\boldsymbol{Z},\ n\neq 0$. **5.** $(7;\ +\infty)$. **6.** $\left[-\dfrac{1}{3};\ 5\right]$. **7.** 4.

К—7. I вар. **1.** -4; 6. **2.** $(2;\ 3)$. **3.** $(0;\ 1]\cup(2;\ 6]$. **4.** $(2{,}5;\ 1{,}5)$. **5.** $(2;\ 5)$; $(-1;\ \sqrt{31})$. **6.** 3. **7.** 1. **II вар.** **1.** -3; $-\dfrac{1}{3}$. **2.** $(0;\ 1)$. **3.** $(0;\ 1]\cup(5;\ 7]$. **4.** $(5;\ 4)$. **5.** $(-1;\ -\sqrt{19})$; $(2;\ -5)$. **6.** 4. **7.** 2. **III вар.** **1.** 3; 7. **2.** $(1;\ 2)$. **3.** $(0;\ 1]\cup(2;\ 3]$. **4.** $(2{,}5;\ 1{,}5)$. **5.** $(3;\ -4\sqrt{2})$, $(-2;\ -\sqrt{17})$. **6.** 5. **7.** -1. **IV вар.** **1.** 0; 9. **2.** $(-1;\ 0)$. **3.** $(0;\ 1]\cup(3;\ 4]$. **4.** $(2{,}5;\ -1{,}5)$. **5.** $(-1;\ \sqrt{15})$, $(2;\ 3)$. **6.** 6. **7.** -2.

Ответы к итоговому тесту

I вариант

Номер задания	*A*1	*A*2	*A*3	*A*4	*A*5	*A*6	*A*7	*A*8	*A*9	*A*10	*A*11	*A*12	*A*13
Номер верного ответа	2	1	4	2	3	1	3	2	3	1	3	4	3

Номер задания	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	*B*6	*B*7
Верный ответ	3	0	4	3	3	5	−2

***C*1.** $\{-5\} \cup [3; +\infty)$. ***C*2.** Если $\alpha \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $x \in \left(2\frac{1}{3};\ 3\right]$; если $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $x \in [3;\ 5)$; если $\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $\alpha = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то нет решений.
***C*3.** -1.

II вариант

Номер задания	*A*1	*A*2	*A*3	*A*4	*A*5	*A*6	*A*7	*A*8	*A*9	*A*10	*A*11	*A*12	*A*13
Номер верного ответа	4	1	4	3	1	4	3	2	3	1	2	3	4

Номер задания	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	*B*6	*B*7
Верный ответ	12	1	2	−3	4	5	−1

***C*1.** $(-\infty; -4] \cup \{3\}$. ***C*2.** Если $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $x \in [3; +\infty)$; если $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{3\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $x \in (1{,}4;\ 3]$; если $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то нет решений. ***C*3.** 4.

Содержание

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Потапов Михаил Константинович
Шевкин Александр Владимирович

Алгебра и начала математического анализа

Дидактические материалы

11 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художники *П. С. Барбаринский, О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Технические редакторы *С. Н. Терехова, Н. Т. Рудникова*
Корректоры *О. В. Крупенко, Г. Н. Смирнова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 02.08.16. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 8,5. Доп. тираж 1000 экз. Заказ № 46752.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в филиале «Смоленский полиграфический комбинат» ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1. Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70. E-mail: spk@smolpk.ru
http://www.smolpk.ru